

- 1) Dite se i seguenti insiemi sono limitati inferiormente/superiormente, limitati. In caso affermativo, determinate l'estremo superiore e l'estremo inferiore (motivando la risposta). Dite se sono massimo e/o minimo, rispettivamente.

i) $A = \{x_n = \cos(\pi + \frac{1}{n}), n \in \mathbf{N}, n \geq 1\};$

ii) $B = \{x_n = \cos(\pi - \frac{1}{n}), n \in \mathbf{N}, n \geq 1\};$

iii) $C = \{x_n = \sin(\pi + \frac{1}{n}), n \in \mathbf{N}, n \geq 1\};$

iv) $D = \{x_n = \arccos(\frac{1-n}{2+n}), n \in \mathbf{N}, n \geq 0\}.$

- 2) Determinate $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, tali che le funzioni $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definite da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-\arctan(\alpha \log(1 - \alpha x^3))}{x^3(2 - \cos 2x)} & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{\sin x + 2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{3^{2x} - 1} & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{\sin(x-1)}{\log x^\beta} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

risultino continue su tutto $\mathbf{R}$.

- 3) Calcolate, se esistono, i seguenti limiti:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{x} \log_2 x}\right);$
 ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt[3]{1+x}\right)^{\frac{1}{\arctan x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^{\frac{1}{\arctan x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt[3]{1+x}\right)^{\frac{1}{\sin x^2}}.$

- 4) Provate che $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1+\frac{1}{x}} = +\infty$. Calcolate $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x e^{1+\frac{1}{x}})^x$.

- 5) Calcolate i seguenti limiti:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 3^{\alpha x} + x^{10}}{e^x + 100x^2}, \quad \alpha > 0; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n - 2^n}{n + 3^n}; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n - 2^n}{n - 2e^n};$
 ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{2n}; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+4}{n-2}\right)^n; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-4}{n-2}\right)^n;$
 iii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n+n^2}; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)^n; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n \log n^2};$

$$\begin{array}{ll} \text{iv)} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(n^4 + \cos n)}{\log(n^5 + \arctan n)}; & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(n + 2^n) - n}{\log_2(3n + 2^n) - n}; \\ \text{v)} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arcsin \frac{1}{n}}{\log(n+2) - \log n}; & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arctan\left(\frac{2}{n-1}\right)}{\sqrt{9 + \frac{1}{n}} - 3}. \end{array}$$

6) Calcolate, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \sin \frac{1}{2^n}; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + n^\alpha)}{\log n}; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(2^n + 1)}{n^\alpha}.$$

7) Calcolate, al variare di $\alpha > 0$, il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos \alpha^n}{n^{\alpha-1}}$.

8) Calcolate il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} [(n+1)^n - n^{n+1}]$.