Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione

CdL in Informatica, Ingegneria dell'informazione e delle comunicazioni e Ingegneria dell'informazione e organizzazione d'impresa

a.a. 2015-2016 - Foglio di esercizi 5 *"continuità, derivabilità e teoremi fondamentali"*

1) Quali delle seguenti equazioni ammettono soluzioni reali? In caso affermativo, sono uniche?

$$e^{-x} - x = 10\,; \qquad 5 + x^4 = 4x^2\,; \qquad 2x^6 + |x| = 1\,.$$

2) Provate che la funzione $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + x + 2$ ha uno ed un solo zero $x_0 \in \mathbf{R}$. Determinate un intervallo $[\widetilde{a}, \widetilde{b}] \subset\,]-1, 0[$ con $x_0 \in]\widetilde{a}, \widetilde{b}[$ e $\widetilde{b} - \widetilde{a} \leq \frac{1}{4}$.

3) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che

$$(*) \qquad \frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq 2x^2 \qquad \forall x \in [0,1]\,.$$

Quali delle seguenti affermazioni sono vere per qualsiasi funzione f soddisfacente (*)?

i) $\exists x_0 \in [0,1] :\ f(x_0) = \frac{7}{4}$; ii) $\exists x_0 \in [0,1] :\ f(x_0) = \frac{3}{2}$;

iii) $\exists x_0 \in [0,1] :\ f(x_0) = 1$; iv) $\exists x_0 \in [0,1] :\ f(x_0) = \frac{1}{2}$.

4) Dite per quali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x^3 - 4\alpha x + \sin(x-1) & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \log x^2 + 5\cos(x^2 - 1) & \text{se } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

verifica le ipotesi del teorema di Weierstrass nell'intervallo $[0,3]$.

5) Determinate i valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ tali che la funzione $f :]-1, +\infty[\to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \log_3(x+1) & \text{se } -1 < x \leq 0 \\ \alpha \sin x + \beta \cos x & \text{se } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ x & \text{se } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

risulti continua su tutto $]-1, +\infty[$. Verificate se per tali valori di α e β la funzione è anche derivabile.

6) Dite quali delle seguenti funzioni non sono derivabili in $x = 0$:

$$|x| \arctan x\,; \quad x|\cos x|\,; \quad |x| \cos x\,; \quad \arctan \sqrt[3]{x}\,; \quad x \arctan \sqrt[3]{x}\,.$$

7) Calcolate, dove esiste, la derivata prima delle seguenti funzioni:

$$\frac{x+2}{\arctan(x^2+1)}\,; \qquad \sin\sqrt[3]{x^3+x^{-1}}\,; \qquad xe^{\sqrt{x}+x}\,; \qquad (1+\cos x)^x\,.$$

8) Verificate che la funzione $f\,:]0,+\infty[\to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = x^2 + \log x$ è biettiva. Determinate $f^{-1}(e^2+1)$ e $(f^{-1})'(e^2+1)$.

9) Determinate il massimo e il minimo (risp. punti di massimo e punti di minimo) delle seguenti funzioni:

i) x^3+3x^2-1 su $[-1,1]$; $\qquad x^3+3x^2-1$ su $[-3,1]$; $\qquad x^3+3x^2-1$ su $[1,2]$.

ii) $|||x|-1|-2|$ su $[1,2]$; $\qquad |||x|-1|-2|$ su $[0,4]$.

10) Dimostrate che la funzione $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ è costante sul suo dominio e determinate il suo valore.

11) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile tale che

(**) $\qquad f(0) = 1\,, \quad f(1) = 1\,, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1\,.$

Quali delle seguenti affermazioni sono vere per qualunque funzione f che soddisfi le condizioni (**)?
i) Esistono almeno due punti x_1 e x_2 tali che $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.
ii) Esiste uno ed un solo punto x_0 tale che $f'(x_0) = 0$.
iii) Esiste almeno un punto x_0 tale che $f'(x_0) = 0$.

12) i) Verificate che $f(x) = \arctan(x^2-3x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle su $[0,3]$. Determinate i punti $c\in]0,3[$ tali che $f'(c) = 0$.
ii) Eseguite quanto in i) per la funzione $f(x) = 2x^4 - x^2 + 1$ con $[a,b] = [-2,2]$.

13) i) Verificate che $f(x) = x|x|$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange su $[a,b] = [-1,1]$. Determinate i punti $c \in\,]-1,1[$ tali che $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
ii) Eseguite quanto in i) per la funzione $f(x) = \sin x$ con $[a,b] = [0,\frac{\pi}{2}]$.