Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione

CdL in Informatica, Ingegneria dell'informazione e delle comunicazioni e Ingegneria dell'informazione e organizzazione d'impresa

a.a. 2015-2016 - Foglio di esercizi 6 *"derivabilità e sviluppi di Taylor"*

1) Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua su $[a, b]$, derivabile in $]a, b[$ con $f'(x) \leq M$ per ogni $x \in]a, b[$. Provate che se $f(b) - f(a) = M(b - a)$, allora $f(x) = f(a) + M(x - a)$ in $[a, b]$.

2) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione tale che $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$ per ogni $x, y \in \mathbf{R}$. Provate che f è costante.

3) Siano $\cosh x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ e $\sinh x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ le funzioni definite da

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \,,$$

dette funzioni **coseno iperbolico** di x e **seno iperbolico** di x , rispettivamente.

i) Studiate le funzioni $\cosh x$ e $\sinh x$ e rappresentatele graficamente.

ii) Provate che $\cosh x$ è una funzione pari, mentre $\sinh x$ è dispari. Provate che

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1 \text{ su } \mathbf{R}.$$

iii) Provate che $(\cosh x)' = \sinh x$ e $(\sinh x)' = \cosh x$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

iv) Provate che $\sinh x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ammette inversa e sua inversa $\sinh^{-1} x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è data da $\sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$. (NOTA: per $\sinh^{-1} x$ si usa anche la notazione Settsh x, detto settore seno iperbolico).

v) Provate che $\cosh x : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ ammette inversa e sua inversa $\cosh^{-1} x : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ è data da $\cosh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$. (NOTA: per $\cosh^{-1} x$ si usa anche la notazione Settch x, detto settore coseno iperbolico).

vi) Determinate il polinomio di Taylor di ordine 6, centrato in $x_0 = 0$, di $\cosh x$ e di $\sinh x$.

4) Usando gli sviluppi di Taylor noti, scrivete il polinomio di Taylor, centrato in $x_0 = 0$, delle seguenti funzioni, fino all'ordine n indicato:

i) $f(x) = 3xe^x - \sinh(\sqrt{1 + x} - 1)$, $\qquad n = 3$;

ii) $f(x) = \log(e^x - \cosh \frac{x}{2} + 1)$, $\qquad n = 3$;

iii) $f(x) = \sin^2(x^3) - x^4 \log(1 + x^2)$, $\qquad n = 12$;

iv) $f(x) = \log(\cos x)$, $\qquad n = 4$;

v) $f(x) = e^{\arctan x}$, $\qquad n = 3$.

5) Usando gli sviluppi di Taylor noti, determinate l'ordine di infinitesimo e la parte principale (rispetto alla funzione campione x) dei seguenti infinitesimi per $x \to 0$:

i) $f(x) = 3(\cos x - 1)e^x + \frac{3}{2}x^2(1+x)$;

ii) $f(x) = (\cos x)^2 - \sqrt{1-2x^2}$;

iii) $f(x) = \sin x - x \cos \frac{x}{\sqrt{3}}$.

6) Usando la definizione di polinomio di Taylor di ordine n associato ad una funzione f e centrato in x_0, determinate i polinomi di Taylor delle seguenti funzioni fino all'ordine n indicato e nel punto x_0 indicato:

i) $f(x) = \cos x \qquad n = 7, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$;

ii) $f(x) = e^{-3x+1} \qquad n = 4, \quad x_0 = 1$.

7) Determinate i seguenti limiti:

i) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x \arctan \frac{x}{2}) + 1 - e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{1 + 2\sin x^4} - 1}$; ii) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\cosh x} - 1 - \frac{x^2}{4}}{(\sin x^2)^2}$;

iii) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x^2 - \sinh x^2}{(\arctan x^3)^\alpha}$ al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$.

8) Dimostrate le seguenti disuguaglianze:

i) $\frac{x-1}{x} \le \log x \le x - 1 \qquad \forall x > 0$;

ii) $x - \frac{x^2}{2} \le \log(1+x) \le x - \frac{x^2}{2(1+x)^2} \qquad \forall x \ge 0$.

9) Determinate al variare di $a > 0$ il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{an+2}{3n+1}\right)^n$.

10) Sia $a_n = \frac{(n+2)^\alpha}{n^2 + 2n}$, con $n \in \mathbf{N}, n \ge 1$ e $\alpha \in \mathbf{R}$.

i) Determinate al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ il carattere di a_n e di $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

ii) Per $\alpha = 0$ calcolate la somma di $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.