

$$(*) \quad y'' - 4y' + 5y = e^{2x}(1 + \cos x) + 5x^2.$$

(1)

1) Risolviamo ~~l'eq. caratteristica~~ l'eq. caratteristica

$$z^2 - 4z + 5 = 0 \quad z_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$

e quindi la soluzione generale dell'eq. omogenea associata a (*) è

$$y(x) = c_1 e^{2x} \cos x + c_2 e^{2x} \sin x.$$

Per trovare una soluzione particolare di (*) basta trovare soluzioni particolari per $f_1(x) = e^{2x}$, $f_2(x) = e^{2x} \cos x$ e $f_3(x) = 5x^2$ e poi sommarli.

• per $f_1(x) = e^{2x}$ si cerca una soluzione particolare $\bar{y}_1(x) = h e^{2x}$. Sostituendo si ottiene $\bar{y}_1'' - 4\bar{y}_1' + 5\bar{y}_1 = e^{2x}$

$$\Leftrightarrow 4he^{2x} - 8he^{2x} + 5he^{2x} = e^{2x} \Leftrightarrow h = 1 \text{ e}$$

quindi la soluzione particolare $\bar{y}_1(x) = e^{2x}$;

• poiché $e^{2x} \cos x$ è soluzione dell'eq. diff. omogenea, per $f_2(x) = e^{2x} \cos x$ si cerca una soluzione particolare del tipo $\bar{y}_2(x) = h x e^{2x} \cos x + k x e^{2x} \sin x$.

$$\text{Poiché } \bar{y}_2'(x) = h e^{2x} \cos x + 2h x e^{2x} \cos x - h x e^{2x} \sin x + k e^{2x} \sin x + 2k x e^{2x} \sin x + k x e^{2x} \cos x$$

$$\begin{aligned} \bar{y}_2''(x) = & 2h e^{2x} \cos x - h e^{2x} \sin x + \\ & + 2h e^{2x} \cos x + 4h x e^{2x} \cos x - 2h x e^{2x} \sin x \\ & - h e^{2x} \sin x - 2h x e^{2x} \sin x - h x e^{2x} \cos x \\ & + 2k e^{2x} \sin x + k e^{2x} \cos x \\ & + 2k e^{2x} \sin x + 4k x e^{2x} \sin x + 2k x e^{2x} \cos x \\ & + k e^{2x} \cos x + 2k x e^{2x} \sin x - k x e^{2x} \sin x \end{aligned}$$

$$\bar{y}_2''(x) - 4\bar{y}_2'(x) + 5\bar{y}_2 = e^{2x} \cos x \quad \Leftrightarrow$$

(2)

$$\begin{aligned} & \cancel{4he^{2x} \cos x} - \cancel{2he^{2x} \sin x} + \cancel{3hxe^{2x} \cos x} - \cancel{4hxe^{2x} \sin x} \\ & + \cancel{4ke^{2x} \sin x} + 2ke^{2x} \cos x + \cancel{3kxe^{2x} \sin x} + \cancel{4kxe^{2x} \cos x} \\ & - \cancel{4he^{2x} \cos x} - \cancel{8hxe^{2x} \cos x} + \cancel{4hxe^{2x} \sin x} - \cancel{4ke^{2x} \sin x} \\ & - \cancel{8kxe^{2x} \sin x} - \cancel{4kxe^{2x} \cos x} \\ & + \cancel{5hxe^{2x} \cos x} + \cancel{5kxe^{2x} \sin x} = e^{2x} \cos x \quad ; \end{aligned}$$

$$h=0$$

$$2k=1 \Rightarrow k=\frac{1}{2}$$

quindi una soluzione particolare è data da $\bar{y}_2(x) =$

$$\underline{\underline{\frac{1}{2} x e^{2x} \sin x}} ;$$

- per $f_3(x) = 5x^2$ si cerca una soluzione particolare della forma $\bar{y}_3(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

$$\text{Poiché } \bar{y}_3'(x) = 2a_2 x + a_1$$

$$\bar{y}_3''(x) = 2a_2$$

si ha che

$$\bar{y}_3''(x) - 4\bar{y}_3'(x) + 5\bar{y}_3 = 5x^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$2a_2 - 8a_2 x - 4a_1 + 5a_2 x^2 + 5a_1 x + 5a_0 = 5x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a_2 = 5 \\ -8a_2 + 5a_1 = 0 \\ 2a_2 - 4a_1 + 5a_0 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$a_2 = 1$$

$$5a_1 = 8 \Rightarrow a_1 = \frac{8}{5}$$

$$5a_0 = \frac{32}{5} - 2 = \frac{22}{5}$$

$$a_0 = \frac{22}{25}$$

e quindi, finalmente

$$\bar{y}(x) = \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x) + \bar{y}_3(x) = \boxed{e^{2x} \left(1 + \frac{1}{2} x \sin x \right) + x^2 + \frac{8}{5} x + \frac{22}{25}}$$

⊛

$$y'' - 4y' - 5y = e^{2x}(1 + \cos x) + 5x^2$$

3

i) Risolviamo l'eq. omett.

$$z^2 - 4z - 5 = 0 \quad z_{1/2} = -1, 5$$

$$(z - 5)(z + 1) = 0$$

e quindi la soluzione generale dell'eq. omogenea associata a ⊛ è

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{5x}.$$

Per trovare una soluzione particolare di ⊛ basta trovare soluzioni particolari per $f_1(x) = e^{2x}$, $f_2(x) = e^{2x} \cos x$ e $f_3(x) = 5x^2$ e poi sommarli.

• per $f_1(x) = e^{2x}$ si cerca una soluzione particolare del tipo $\bar{y}_1(x) = h e^{2x}$. Sostituendoci otteniamo $\bar{y}_1''(x) - 4\bar{y}_1'(x) - 5\bar{y}_1(x) = e^{2x}$

$$= e^{2x} \Leftrightarrow 4h e^{2x} - 8h e^{2x} - 5h e^{2x} = e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow -9h e^{2x} = e^{2x} \Leftrightarrow h = -1/9$$

ovvero $\bar{y}_1(x) = -\frac{1}{9} e^{2x}$;

• per $f_2(x) = e^{2x} \cos x$ si cerca una soluzione particolare del tipo $\bar{y}_2(x) = h e^{2x} \cos x + k e^{2x} \sin x$.

Poi deriviamo $\bar{y}_2'(x) = 2h e^{2x} \cos x - h e^{2x} \sin x + 2k e^{2x} \sin x + k e^{2x} \cos x$

$$\begin{aligned} \bar{y}_2''(x) = & \underline{4h e^{2x} \cos x} - 2h e^{2x} \sin x - 2h e^{2x} \sin x - \underline{h e^{2x} \cos x} \\ & + 4k e^{2x} \sin x + 2k e^{2x} \cos x + 2k e^{2x} \cos x - \cancel{k e^{2x} \sin x} \end{aligned}$$

$$\bar{y}_2''(x) - 4\bar{y}_2' - 5\bar{y}_2 = e^{2x} \cos x \quad \Leftrightarrow$$

(4)

$$\begin{aligned} & \cancel{3h e^{2x} \cos x} - \cancel{4h e^{2x} \sin x} + \cancel{3k e^{2x} \sin x} + \cancel{4k e^{2x} \cos x} \\ & - \cancel{8h e^{2x} \cos x} + \cancel{4h e^{2x} \sin x} - \cancel{8k e^{2x} \sin x} - \cancel{4k e^{2x} \cos x} \\ & - \cancel{5h e^{2x} \cos x} - \cancel{5k e^{2x} \sin x} = e^{2x} \cos x \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -10h e^{2x} \cos x - 10k e^{2x} \cos x = e^{2x} \cos x$$

$$\Leftrightarrow k=0 \quad h=-\frac{1}{10}$$

quindi una soluzione particolare è data da $\bar{y}_2(x) = -\frac{1}{10} x e^{2x} \cos x$;

• per $f_3(x) = 5x^2$ si cerca una soluzione particolare della forma $\bar{y}_3(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

$$\text{Poiché } \bar{y}_3'(x) = 2a_2 x + a_1 \quad \bar{y}_3''(x) = 2a_2$$

si ha che

$$\bar{y}_3''(x) - 4\bar{y}_3'(x) - 5\bar{y}_3 = 5x^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$2a_2 - 8a_2 x - 4a_1 - 5a_2 x^2 - 5a_1 x - 5a_0 = 5x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5a_2 = 5 & \Rightarrow a_2 = -1 \\ -8a_2 - 5a_1 = 0 & \Rightarrow -5a_1 = -8 \quad a_1 = \frac{8}{5} \\ 2a_2 - 4a_1 - 5a_0 = 0 & \Rightarrow -5a_0 = +2 + \frac{32}{5} = \frac{42}{5} \end{cases}$$

e quindi finalmente

$$\bar{y}(x) = \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x) + \bar{y}_3(x) = \boxed{-\frac{1}{9} e^{2x} - \frac{1}{10} x e^{2x} \cos x - x^2 + \frac{8}{5} x - \frac{42}{25}} \quad a_0 = -\frac{42}{25}$$