

Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
 CdL in Informatica, Ingegneria dell'Informazione e delle Comunicazioni e
 Ingegneria dell'Informazione e organizzazione d'impresa
 a.a. 2015-2016 - Foglio di esercizi 5 "continuità, derivabilità e teoremi fondamentali"

1) $e^{-x} - x = 10$: Notiamo che $f(x) = e^{-x} - x$ è una funzione continua su $\mathbb{R}$; inoltre $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$; quindi $\text{im} f = \mathbb{R}$.

(TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI)

Quindi esiste almeno una soluz. dell'eq. $f(x) = 10$. Inoltre e^{-x} e $-x$ sono funz. decrescenti su $\mathbb{R}$, quindi $e^{-x} - x$ è strett. decrescente su $\mathbb{R}$ (in alternativa, possiamo osservare che $(e^{-x} - x)' = -e^{-x} - 1 = -(e^{-x} + 1) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e quindi $e^{-x} - x$ è strett. decrescente su $\mathbb{R}$).

Questo fatto implica l'unicità della soluzione dell'equazione $e^{-x} - x = 10$. $\square$

$5 + x^4 = 4x^2$: Possiamo scrivere l'eq. data in forma equivalente $x^4 - 4x^2 + 5 = 0$ che si può anche scrivere $(x^2 - 2)^2 + 1 = 0$.

Possiamo allora concludere che l'eq. data non ammette soluzioni in $\mathbb{R}$. $\square$

$2x^6 + |x| = 1$: Possiamo scrivere l'eq. data in forma equivalente $2x^6 + |x| - 1 = 0$. Osserviamo che $f(x) = 2x^6 + |x| - 1$ è continua e pari.

(TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI)

Inoltre $f(x) \geq -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e $f(x) = -1 \Leftrightarrow x = 0$.

Infine $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (-\infty)}} f(x) = +\infty$; quindi $\text{im} f = [-1, +\infty[$. Quindi

sono due soluzioni (essendo f pari) dell'eq. $f(x) = 0$, e quindi dell'eq. data. $\blacksquare$

2) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + x + 2$: f è continua su $\mathbb{R}$; inoltre $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; quindi $\text{im} f = \mathbb{R}$; possiamo

allora afferire che $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x_0) = 0$. Poiché

$f'(x) = 12x^2 - 6x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, f è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

(TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI)

(METODO DI BISEZIONE)

Quindi possiamo afferire che tale x_0 è unico.

Poiché $f(-1) = -6 (< 0)$, $f(0) = 2 (> 0)$, si ha che $x_0 \in]-1, 0[$.

Determiniamo $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ mediante il metodo di bisezione. Notiamo che

il pt. medio di $]-1, 0[$ è $c_0 = -\frac{1}{2}$ e $f(-\frac{1}{2}) = \cancel{1}(-\frac{1}{2}) - 3(\frac{1}{4}) - \frac{1}{2} + 2 = \frac{1}{4} (> 0)$

Quindi $x_0 \in]-1, -\frac{1}{2}[$. Il pt. medio di $]-1, -\frac{1}{2}[$ è $c_1 = -\frac{3}{4}$

e $f(-\frac{3}{4}) = \cancel{1}(-\frac{3}{4}) - 3(\frac{9}{16}) - \frac{3}{4} + 2 = -\frac{27}{8} - \frac{3}{4} + 2 = -\frac{17}{8} (< 0)$.

Quindi $x_0 \in]-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}[$. Ora basta porre $[\tilde{a}, \tilde{b}] = [-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}]$

e si ha quanto richiesto. $\square$

3) Da (*) si ha subito che $f(0) = 0$, e $\frac{1}{2} \leq f(1)$.

(TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI)

Essendo f una funzione continua su $[0, 1]$, f assume in $[0, 1]$

tutti i valori compresi tra 0 e $\frac{1}{2}$, ossia $f([0, 1]) \supseteq [0, \frac{1}{2}]$

Quindi possiamo afferire che $\exists x_0 \in [0, 1] : f(x_0) = \frac{1}{2}$, ossia iv).

Nota che i), ii), iii) non sono vere per qualsiasi funzione f

soddisfacente (*); infatti $f(x) = \frac{x^2}{2}$ soddisfa (*), ma per essa

nessuna delle affermazioni i), ii) iii) è vera. $\blacksquare$

4) Dobbiamo verificare che f sia continua su $[0, 3]$. f è continua

per ogni $x \in [0, 3] \setminus \{1\}$ essendo composizione e somma di

funzioni continue. Basta controllare la continuità di f in $x=1$.

Ora $f(1) = \alpha^2 - 4\alpha = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. D'altra parte

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\log x^2 + 5 \cos(x^2 - 1)) = 5$. Quindi f è continua

in $x=1 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha = 5$, ossia $\alpha^2 - 4\alpha - 5 = 0$, ossia per

$$\boxed{\alpha = -1, \alpha = 5}.$$

5) f è continua in tutti i punti di $]-1, +\infty[\setminus \{0, \frac{1}{2}\}$, poiché

composizione e somma di funzioni continue.

Ora, $f(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, mentre $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\alpha \sin x + \beta \cos x] = \beta$. Quindi f è continua in $x=0 \Leftrightarrow \boxed{\beta=0}$.

Inoltre $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} x = \frac{\pi}{2}$, mentre $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\alpha \sin x + \beta \cos x) = \alpha$. Quindi f è continua in $x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2}}$. In conclusione, f risulta continua in $] -1, +\infty[$

se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e $\beta = 0$ e la funzione si scrive

$$f(x) = \begin{cases} \log_3(x+1) & \text{se } -1 < x \leq 0 \\ \frac{\pi}{2} \sin x & \text{se } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ x & \text{se } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Per ogni $x \neq 0, \frac{\pi}{2}$, la funzione f è derivabile essendo composta di funzioni derivabili o definita mediante funzioni elementari derivabili.

Dobbiamo quindi controllare la derivabilità di f solo nei pr. $x=0, x=\frac{\pi}{2}$.

Atteniamo, per $h > 0$

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\frac{\pi}{2} \sin h}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \frac{\pi}{2}.$$

Per $h < 0$

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\log_3(h+1)}{h} = \frac{\log(1+h)}{h} \cdot \frac{1}{\log 3} \xrightarrow{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{\log 3}.$$

Poiché $f'_+(0) = \frac{\pi}{2} \neq \frac{1}{\log 3} = f'_-(0)$, si ha che f non è derivabile in $x=0$.

Infine, per $h > 0$

$$\frac{f(\frac{\pi}{2}+h) - f(\frac{\pi}{2})}{h} = \frac{\cancel{\frac{\pi}{2}} + h - \cancel{\frac{\pi}{2}}}{h} = 1 \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 1,$$

mentre per $h < 0$

$$\begin{aligned} \frac{f(\frac{\pi}{2}+h) - f(\frac{\pi}{2})}{h} &= \frac{\frac{\pi}{2} \sin(\frac{\pi}{2}+h) - \frac{\pi}{2}}{h} = \frac{\frac{\pi}{2} [\sin \frac{\pi}{2} \cosh + \cancel{\cos \frac{\pi}{2} \sinh} - 1]}{h} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{(\cosh - 1)}{h} = \frac{\pi}{2} \frac{(\cosh - 1)}{h^2} \cdot h \xrightarrow{h \rightarrow 0^-} 0. \end{aligned}$$

Poiché $f'_+(\frac{\pi}{2}) = 1 \neq 0 = f'_-(\frac{\pi}{2})$, si ha che f non è derivabile in $x = \frac{\pi}{2}$.



6) $|x| \arctan x$ è derivabile in $x=0$, poiché $\arctan x = x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$
e quindi $|x| \arctan x = x|x| + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$

(Nota: si può anche facilmente osservare che

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{|h| \arctan h}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \text{ e quindi } f'(0)=0. \quad \square$$

$x|\cos x|$ è derivabile in $x=0$, poiché $x|\cos x| \sim x$ per $x \rightarrow 0$.

(Nota: si può anche facilmente osservare che

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{h|\cos h|}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1 \text{ e quindi } f'(0)=1. \quad \square$$

$|x|\cos x$ non è derivabile in $x=0$, poiché $|x|\cos x \sim |x|$ per $x \rightarrow 0$.

(Nota: si osserva anche facilmente

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{|h|\cos h}{h} \begin{cases} \rightarrow 1 & \text{se } h \rightarrow 0^+ \\ \rightarrow -1 & \text{se } h \rightarrow 0^- \end{cases}$$

e quindi $\nexists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$.) □

$\arctan \sqrt[3]{x}$ non è derivabile in $x=0$, poiché $\arctan \sqrt[3]{x} \sim \sqrt[3]{x}$ per $x \rightarrow 0$.

(Nota: si può anche verificare

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{\arctan \sqrt[3]{h}}{h} = \frac{(\arctan \sqrt[3]{h})}{\sqrt[3]{h}} \cdot \frac{\sqrt[3]{h}}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} +\infty$$

e si ha $f'(0)=+\infty$. □

$x \arctan \sqrt[3]{x}$ è derivabile in $x=0$, poiché $x \arctan \sqrt[3]{x} \sim x \sqrt[3]{x}$ per $x \rightarrow 0$.

(Nota: si può anche verificare

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{h \arctan \sqrt[3]{h}}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \text{ e si ha } f'(0)=0. \quad \blacksquare$$

$$7) \left(\frac{x+2}{\arctan(x^2+1)} \right)' = \frac{\arctan(x^2+1) - (x+2) \cdot \frac{2x}{1+(x^2+1)^2}}{\arctan^2(x^2+1)}.$$

$$\left(\sin \sqrt[3]{x^3+x^{-1}} \right)' = \left(\cos \sqrt[3]{x^3+x^{-1}} \right) \frac{1}{3} (x^3+x^{-1})^{-\frac{2}{3}} (3x^2 - x^{-2}). \quad \square$$

$$(x e^{\sqrt{x}+x})' = e^{\sqrt{x}+x} + x e^{\sqrt{x}+x} \left(\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + 1 \right). \quad \square$$

$$\begin{aligned} \left[(1+\cos x)^x \right]' &= \left[e^{x \log(1+\cos x)} \right]' = e^{x \log(1+\cos x)} \left[\log(1+\cos x) + \frac{x}{1+\cos x} \cdot (-\sin x) \right] \\ &= (1+\cos x)^x \left[\log(1+\cos x) - \frac{x \sin x}{1+\cos x} \right]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

8) $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 + \log x$ è una funzione continua.

Inoltre $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Quindi $\text{im} f = \mathbb{R}$.

Quindi f è suriettiva. D'altra parte $f'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$ su $]0, +\infty[$; quindi f è strettamente monotona e quindi iniettiva.

Risulta così che f è biiettiva; esiste quindi l'inversa $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$.

Notiamo che $f^{-1}(e^2+1) = x \Leftrightarrow f(x) = e^2+1 \Leftrightarrow x^2 + \log x = e^2+1$. Si ha facilmente che $x = e$, ossia $\boxed{f^{-1}(e^2+1) = e}$.

Infine $(f^{-1})'(e^2+1) = \frac{1}{f'(e)}$. Poiché $f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$ si ha

$$\boxed{(f^{-1})'(e^2+1)} = \frac{1}{2e + \frac{1}{e}} = \boxed{\frac{e}{2e^2+1}}. \quad \blacksquare$$

9) $\boxed{x^3 + 3x^2 - 1 \text{ su } [-1, 1]}$

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ è una funzione continua su $[-1, 1]$; per il teorema di Weierstrass esiste massimo e minimo di f su $[-1, 1]$.

Essendo f derivabile su tutto $\mathbb{R}$, i pt. di massimo/minimo vengono a trovarsi tra i pt. critici della funzione o agli estremi dell'intervallo $[-1, 1]$. Ora

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x=0, x=-2.$$

Poiché $f(-1) = 1$, $f(1) = 3$, $f(0) = -1$ possiamo concludere

$$\begin{aligned} \min_{[-1, 1]} f &= -1 & x=0 \text{ pt. di minimo} \\ \max_{[-1, 1]} f &= 3 & x=1 \text{ pt. di massimo.} \end{aligned} \quad \square$$

TEOREMA VALORI INTERMEDI
MONOTONIA E DERIVATE
DERIVATA FUNZIONE INVERSA

(TEOREMA DI WEIERSTRASS
TEOREMA DI FERMAT)

$$x^3 + 3x^2 - 1 \text{ su } [-3, 1]$$

Allora da confrontare $f(-3)$, $f(-2)$, $f(0)$ e $f(1)$.

Poiché $f(-3) = -1$, $f(-2) = 3$, $f(0) = -1$, $f(1) = 3$, possiamo concludere che

$$\min_{[-3, 1]} f = -1, \quad x = -3, x = 0 \text{ pt. di minimo}$$

$$\max_{[-3, 1]} f = 3, \quad x = -2, x = 1 \text{ pt. di massimo.}$$

□

$$x^3 + 3x^2 - 1 \text{ su } [1, 2]$$

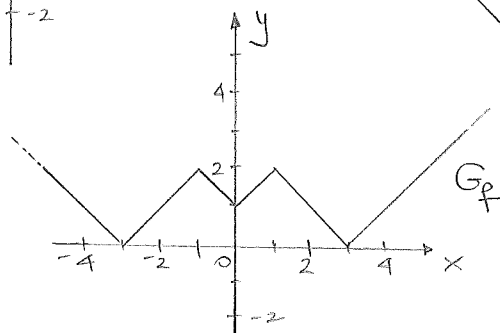
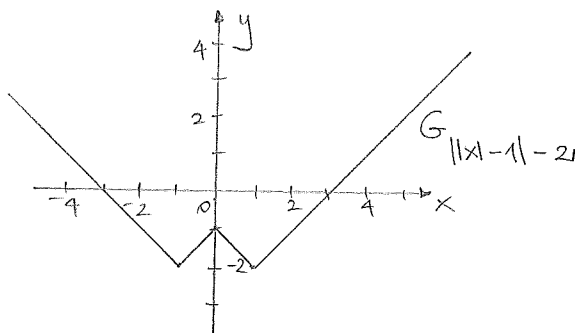
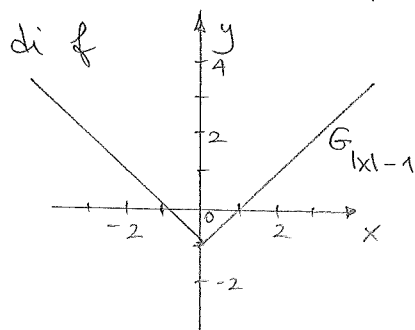
Dobbiamo confrontare $f(1)$ e $f(2)$. Poiché $f(1) = 3$ e $f(2) = 19$, possiamo concludere che

$$\min_{[1, 2]} f = 3 \quad x = 1 \text{ pt. di minimo,}$$

$$\max_{[1, 2]} f = 19 \quad x = 2 \text{ pt. di massimo.}$$

□

ii) $f(x) = ||x| - 1| - 2$ è una funzione continua su $\mathbb{R}$; quindi su ogni intervallo chiuso e limitato ammette massimo e minimo per il teorema di Weierstrass. Per individuarli mi baserò "semplicemente" sulla rappresentazione grafica di f



• $\max_{[1,2]} f = 2$ $x = 1$ pt. di massimo

$\min_{[1,2]} f = 1$ $x = 2$ pt. di minimo. □

• $\max_{[0,4]} f = 2$ $x = 1$ pt. di massimo

$\min_{[0,4]} f = 0$ $x = 3$ pt. di minimo. ■

10) $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ è definita su $[-1, 1]$, È derivabile su $] -1, 1[$ e si ha

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ e quindi è costante su $] -1, 1[$

e per continuità è costante su $[-1, 1]$. Risulta $f(0) = \frac{\pi}{2}$ e quindi $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1, 1]$. ■

11) Notiamo che per il teorema di Rolle esiste $c \in]0, 1[$ tale che $f'(c) = 0$.

Se $f'(1) = 0$, allora abbiamo già due pt. x_1, x_2 tali che

$f'(x_1) = f'(x_2) = 0$, ossia $x_1 = c$ e $x_2 = 1$.

Se $f'(1) \neq 0$, allora sarà $f'(1) < 0$ oppure $f'(1) > 0$.

Supponiamo, per esempio, che $f'(1) < 0$ (analog. si procede per $f'(1) > 0$). Allora esiste $\bar{x} > 1$ tale che $f(\bar{x}) < f(1)$ (segue dal lemma preliminare del teorema di Fermat). D'altra parte,

poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ed f è continua, si ha che $\exists \hat{x} \neq \bar{x}$ $\hat{x} > 1$ tale che $f(\hat{x}) = f(\bar{x})$. Dal teorema di Rolle (applicato all'intervallo $[\bar{x}, \hat{x}]$) segue che esiste $\tilde{c} \in [\bar{x}, \hat{x}]$ tale che

$f'(\tilde{c}) = 0$. Ponendo quindi $x_1 = c$ e $x_2 = \tilde{c}$ si è provato che i) è vera (ovviamente anche ii) risulta vera) ■

12) i) $f(x) = \arctg(x^2 - 3x)$ è continua e derivabile in $\mathbb{R}$ (essendo composizione di funzioni continue e derivabili in $\mathbb{R}$), e quindi in particolare f è continua in $[0, 3]$ e derivabile in $]0, 3[$.

Inoltre $f(0) = f(3) = \arctg 0 = 0$.

Quindi sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Rolle in $[0, 3]$;

allora $\exists c \in]0, 3[: f'(c) = 0$. Notiamo che $f'(c) = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{2c-3}{1+(c^2-3c)^2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{c = \frac{3}{2}}$$

□

ii) $f(x) = 2x^4 - x^2 + 1$ è continua e derivabile in $\mathbb{R}$ e quindi in particolare è continua in $[-2, 2]$ e derivabile in $] -2, 2[$. Inoltre $f(-2) = 2 \cdot 16 - 4 + 1 = 29 = f(2)$. Per il teorema di Rolle $\exists c \in] -2, 2[: f'(c) = 0$.

Ora $f'(x) = 8x^3 - 2x \quad \forall x \in] -2, 2[$ e quindi $f'(c) = 0 \Leftrightarrow$

$$2c(4c^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{c = 0, c = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{2}} \quad \left(\text{che appartengono tutti a }] -2, 2[\right)$$

■

13) i) $f(x) = x|x|$ è continua in $\mathbb{R}$ (prodotto di funz. continue) e derivabile! (se $x \neq 0$ la derivabilità di f è ovvia! In $x=0$ si ha $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{h|h|}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ e quindi f è derivabile anche in $x=0$, e si ha

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \geq 0 \\ -2x & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Quindi sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Lagrange. Cerchiamo

$$c \in] -1, 1[: f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{2}{2} = 1. \text{ Si ha facilmente}$$

$$\boxed{c = \frac{1}{2} \text{ e } c = -\frac{1}{2}} \quad \left(\text{che appartengono tutti a }] -1, 1[\right)$$

□

ii) $f(x) = \sin x$ è continua in $[0, \frac{\pi}{2}]$ e derivabile in $]0, \frac{\pi}{2}[$ (essendo su tutto $\mathbb{R}$). Quindi sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Lagrange.

$$\text{Cerchiamo } c \in]0, \frac{\pi}{2}[: f'(c) = \frac{f(\frac{\pi}{2}) - f(0)}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \cos c = \frac{2}{\pi}.$$

$$\text{Ne segue } \boxed{c = \arccos \frac{2}{\pi}}.$$

■