

Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
 CdL in Informatica, Ingegneria dell'Informazione e delle Comunicazioni
 e Ingegneria dell'Informazione e Organizzazione d'Impresa
 a.a. 2015-2016 - Foglio di esercizi 6 "derivabilità e sviluppi di Taylor"

1) Consideriamo la funzione $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x) = f(x) - [f(a) + M(x-a)]$.
 Allora g è continua in $[a, b]$, derivabile in $]a, b[$ e $g(a) = 0$ (per definizione) e $g(b) = 0$ (per ipotesi). Inoltre, per ipotesi,
 $g'(x) = f'(x) - M \leq 0$ in $]a, b[$, da cui $g(x)$ è decrescente in $]a, b[$. Poiché $g(a) = 0$ e $g(b) = 0$, risulta $g(x) = 0$ in $]a, b[$ e quindi $f(x) = f(a) + M(x-a)$ in $[a, b]$. ■

2) Proviamo che $f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Infatti, sia $x \in \mathbb{R}$ e $h \neq 0$;
 allora $\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq \frac{h^2}{h} = h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Quindi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0 \quad \text{e quindi} \quad f'(x) = 0.$$

Dall'arbitrarietà di x , segue che $f' \equiv 0$ in $\mathbb{R}$ e quindi $f(x) = \text{costante}$. ■

3) i) $\cosh x \doteq \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; • segue subito che $\cosh x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 $f(x) \equiv$ • $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = +\infty$.

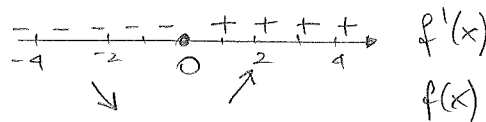
• $\text{dom } f' = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$f'(x) = 0 \iff e^x = e^{-x} \iff x = 0$$

Quindi l'unico pt. critico di f è $x = 0$

Risulta che $x = 0$ è pt. di min. loc. (stretto) per f e



$$\underline{\underline{f(0) = 1}}$$

• $\text{dom } f'' = \mathbb{R}$

$$f''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

e $f''(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$; dunque $f(x)$ è convessa in $\mathbb{R}$

$$g(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = +\infty$

• $\text{dom } g' = \mathbb{R}$
e $g'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

e $g'(x) > 0$ in $\mathbb{R}$ e quindi

$g(x)$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$.

• $\text{dom } g'' = \mathbb{R}$
e $g''(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

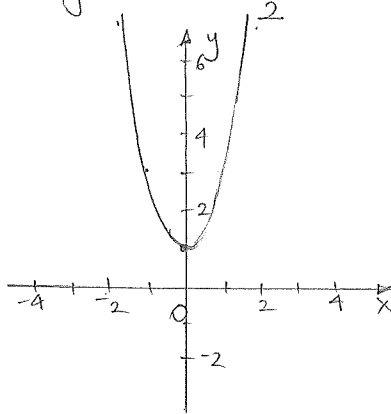
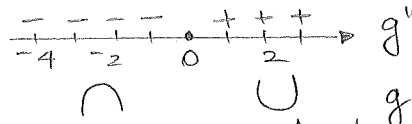


grafico qualitativo di
 $f(x) = \cosh x$

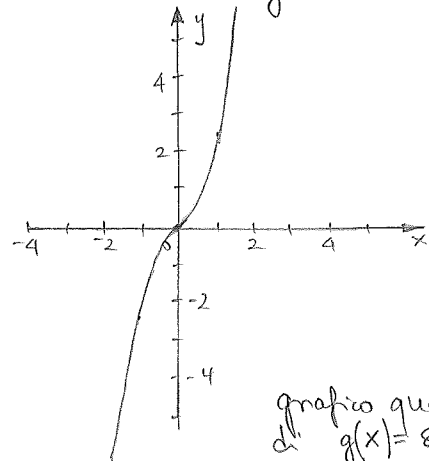


grafico qualitativo di
 $g(x) = \sinh x$.

□

ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x$

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{(e^x - e^{-x})}{2} = -\sinh x$$

Inoltre, $\forall x \in \mathbb{R}$
 $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$

$$= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} = 1.$$

□

iii) Già visto in i) che $(\cosh x)' = \sinh x$ e $(\sinh x)' = \cosh x \forall x \in \mathbb{R}$.

□

iv) Essendo g strettamente crescente in $\mathbb{R}$, si ha che g è iniettiva in $\mathbb{R}$.

Inoltre g è continua in $\mathbb{R}$, $\inf_{\mathbb{R}} g = -\infty$, $\sup_{\mathbb{R}} g = +\infty$. Risulta che $\text{img} = \mathbb{R}$ e quindi g è suriettiva da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

Allora $\exists g^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Osserviamo che $\forall y \in \mathbb{R}$ si ha

$$y = \sinh x \Leftrightarrow y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Leftrightarrow 2y = e^x - e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2}$$

$\Leftrightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$. Poiché $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ si ha solo la soluzione $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$ e quindi $x = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$.

Potremo allora dire che $\sinh^{-1} x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione definita da $\sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. $\square$

v) Essendo f strettamente crescente su $[0, +\infty[$, si ha che f è iniettiva su $\mathbb{R}$. Inoltre f è continua su $[0, +\infty[$, $\inf_{[0, +\infty[} f = \min_{[0, +\infty[} f = 1$ e $\sup_{[0, +\infty[} f = +\infty$. Risulta che $\text{im } f = [1, +\infty[$ e

quindi f è suriettiva da $[0, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$. Allora $\exists f^{-1}: [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$. Osserviamo che $\forall y \geq 1$ si ha $y = \cosh x$
 $\Leftrightarrow y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Leftrightarrow 2y = e^x + e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$
 $\Leftrightarrow e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} \Leftrightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$. Notiamo che $y = \cosh x \geq 1$, quindi $\sqrt{y^2 - 1}$ è ben definita. Inoltre si deve avere $x = \cosh^{-1} y \geq 0$, visto che l'immagine inversa di $\cosh^{-1}$ è $[0, +\infty[$; quindi $e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$ (nota che $\forall y > 1$ risulta $y - \sqrt{y^2 - 1} < 1$). Ne segue che $x = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$.

Potremo allora dire che $\cosh^{-1} x: [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ è la funzione definita da $\cosh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \forall x \geq 1$.

vi) Abbiamo $f(x) = \cosh x$, $f^{(1)}(x) = \sinh x$, $f^{(2)}(x) = \cosh x$, $f^{(3)}(x) = \sinh x$

$$\text{da cui } \boxed{P_6(x) = \sum_{k=0}^6 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}};$$

Inoltre, $g(x) = \sinh x$, $g^{(1)}(x) = \cosh x$, $g^{(2)}(x) = \sinh x$, $g^{(3)}(x) = \cosh x$,
 $g^{(4)}(x) = \sinh x$, $g^{(5)}(x) = \cosh x$, $g^{(6)}(x) = \sinh x$

da cui
$$P_5(x) = \sum_{k=0}^5 \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

4) i) $f(x) = 3xe^x - \sinh(\sqrt{1+x} - 1)$.

Ricordiamo che $(1+x)^d = 1 + dx + \frac{d(d-1)}{2!}x^2 + \frac{d(d-1)(d-2)}{3!}x^3 + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$
e quindi, per $d = \frac{1}{2}$, si ottiene

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3) \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Ne segue che

$$\sqrt{1+x} - 1 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3) \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Ricordiamo inoltre che

$$\sinh t = t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + o(t^6) \text{ e}$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + o(t^3) \text{ per } t \rightarrow 0.$$

Scriviamo allora

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2) \right) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3) \right) - \\ &\quad - \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2}x + o(x) \right)^3 + o(x^3) \\ &= 3x + 3x^2 + \frac{3}{2}x^3 + o(x^3) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3) \\ &\quad - \frac{1}{3!} \frac{x^3}{8} + o(x^3) \\ &= \frac{5}{2}x + \frac{25}{8}x^2 + \frac{17}{12}x^3 + o(x^3) \text{ per } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Il polinomio cercato è dunque
$$P_3(x) = \frac{5}{2}x + \frac{25}{8}x^2 + \frac{17}{12}x^3$$

ii) $f(x) = \log(e^x - \cosh \frac{x}{2} + 1)$

Ricordiamo che
$$\left. \begin{aligned} e^t &= 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + o(t^3) \\ \cosh t &= 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4) \\ \log(1+t) &= t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3) \end{aligned} \right\} \text{ per } t \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \text{Quindi } e^x - \cosh \frac{x}{2} + 1 &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - \cancel{1} - \frac{x^2}{4 \cdot 2} + o(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \log(e^x - \cosh \frac{x}{2} + 1) &= \log\left(1 + \underbrace{x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}_{\text{...}}\right) \\ &= x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x + o(x)\right)^3 + o(x^3) \\ &= x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{8}x^3 + o(x^3) + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\ &= x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Il polinomio cercato è dunque $P_3(x) = x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{8}x^3$

□

iii) $f(x) = \sin^2(x^3) - x^4 \log(1+x^2)$

Ricordiamo che $\sinh t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + o(t^5)$ per $t \rightarrow 0$

e $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)$ per $t \rightarrow 0$.

Dunque $\sin x^3 = x^3 - \frac{x^9}{6} + o(x^9)$ e

$\sin^2(x^3) = x^6 - \frac{x^{12}}{3} + o(x^{12})$ per $x \rightarrow 0$.

Otteniamo

$$\begin{aligned} \sin^2(x^3) - x^4 \log(1+x^2) &= x^6 - \frac{x^{12}}{3} + o(x^{12}) - \\ &\quad - x^4 \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + o(x^8) \right) \\ &= \cancel{x^6} - \frac{x^{12}}{3} + o(x^{12}) - \cancel{x^6} + \frac{x^8}{2} - \frac{x^{10}}{3} + \frac{x^{12}}{4} + o(x^{12}) \\ &= \frac{x^8}{2} - \frac{x^{10}}{3} - \frac{x^{12}}{12} + o(x^{12}) \quad \text{per } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Il polinomio cercato è dunque $P_{12}(x) = \frac{x^8}{2} - \frac{x^{10}}{3} - \frac{x^{12}}{12}$

□

iv) $f(x) = \log(\cos x)$

Ricordiamo che $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4)$ per $t \rightarrow 0$

$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)$ per $t \rightarrow 0$.

Dunque

$$\begin{aligned} \log(\cos x) &= \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) \\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)^2 + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \\ &\quad - \frac{x^4}{8} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4) \end{aligned}$$

Il polinomio cercato è dunque $\boxed{P_4(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}}$.

□

v) $f(x) = e^{\arctan x}$

Ricordiamo che $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$ per $t \rightarrow 0$

e $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$.

Dunque

$$\begin{aligned} e^{\arctan x} &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \text{ per } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Il polinomio cercato è dunque $\boxed{P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3}$.

■

5) i) $f(x) = 3(\cos x - 1)e^x + \frac{3}{2}x^2(1+x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= 3\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^3 \\ &= 3\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^3 \\ &= -\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{3}{4!}x^4 + o(x^4) + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^3 \\ &= -\frac{5}{8}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Ne segue allora che la parte principale di $f(x)$, per $x \rightarrow 0$,

$-\frac{5}{8}x^4$ e che l'ordine di infinitesimo è 4. □

ii) Poiché lo sviluppo della funzione $(1+t)^{\alpha}$ per $\alpha = \frac{1}{2}$, risulta

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} + o(t^3),$$

sostituendo $t = -2x^2$ si ha

$$\sqrt{1-2x^2} = 1 - x^2 - \frac{\cancel{1}x^4}{\cancel{8}_2} - \frac{\cancel{8}x^6}{\cancel{16}_2} + o(x^6).$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} (\cos x)^2 &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)^2 \\ &= 1 - x^2 + 2\frac{x^4}{4!} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) \end{aligned}$$

ne segue

$$\begin{aligned} (\cos x)^2 - \sqrt{1-2x^2} &= \cancel{1} - \cancel{x^2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4) - \cancel{1} + \cancel{x^2} + \frac{x^4}{2} + o(x^4) \\ &= \frac{5}{6}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Dunque la parte principale di $f(x)$, per $x \rightarrow 0$, è $\frac{5}{6}x^4$ e l'ordine di infinitesimo è 4. □

iii) Poiché lo sviluppo della funzione

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4), \text{ per } t \rightarrow 0,$$

sostituendo $t = \frac{x}{\sqrt{3}}$ si ha

$$\cos \frac{x}{\sqrt{3}} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{9 \cdot 4!} + o(x^4).$$

D'altra parte

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \text{ per } x \rightarrow 0$$

e si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) - x \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{9 \cdot 4!} + o(x^4)\right) \\ &= \frac{x^5}{5!} - \frac{x^5}{9 \cdot 4!} + o(x^5) = \frac{4}{9 \cdot 5!} x^5 + o(x^5) \\ &= \frac{x^5}{270} + o(x^5). \end{aligned}$$

Posiamo quindi concludere che la parte principale di $f(x)$ per $x \rightarrow 0$ è $\frac{x^5}{270}$ e che l'ordine di infinitesimo è 5. ■

$$6) i) f(x) = \cos x : \quad f^{(0)}(x) = \cos x \quad f^{(1)}(x) = -\sin x \quad f^{(2)}(x) = -\cos x \\ f^{(3)}(x) = \sin x \quad f^{(4)}(x) = \cos x \quad f^{(5)}(x) = -\sin x \\ f^{(6)}(x) = -\cos x \quad f^{(7)}(x) = \sin x$$

Dunque

$$P_7(x) = \sum_{k=0}^7 \frac{f^{(k)}(\frac{\pi}{2})}{k!} (x - \frac{\pi}{2})^k = \\ = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{1}{5!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5 + \frac{1}{7!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^7$$

$$ii) f(x) = e^{-3x+1} \quad f^{(0)}(x) = e^{-3x+1} \quad f^{(1)}(x) = -3e^{-3x+1} \quad f^{(2)}(x) = 9e^{-3x+1} \\ f^{(3)}(x) = -27e^{-3x+1} \quad f^{(4)}(x) = 81e^{-3x+1}$$

Dunque

$$P_4(x) = \sum_{k=0}^4 \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k \\ = e^{-2} - 3e^{-2}(x-1) + \frac{9}{2!} e^{-2}(x-1)^2 - \frac{27}{3!} e^{-2}(x-1)^3 + \\ + \frac{81}{4!} e^{-2}(x-1)^4 \\ = e^{-2} \left(1 - 3(x-1) + \frac{9}{2}(x-1)^2 - \frac{9}{2}(x-1)^3 + \frac{27}{8}(x-1)^4 \right)$$

$$7) i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log\left(1 + x \arctan \frac{x}{2}\right) + 1 - e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{1+2\sin x^4} - 1} :$$

Poiché $\sqrt{1+2\sin x^4} - 1 = x^4 + o(x^4)$, per $x \rightarrow 0$, dobbiamo

calcolare lo sviluppo del quarto ordine della funzione al numeratore.

Poiché $\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3)$ per $t \rightarrow 0$ si ha $x \arctan \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8 \cdot 3} + o(x^4)$

Ricordando che

per $x \rightarrow 0$.

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad \text{per } t \rightarrow 0$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad "$$

si ha

$$\log\left(1 + x \arctan \frac{x}{2}\right) + 1 - e^{\frac{x^2}{2}} = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8 \cdot 3} + o(x^4) \right) - \frac{x^4}{8} + o(x^4) + 1 \\ - 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

-9-

$$= -\frac{x^4}{8 \cdot 3} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) = -\frac{7}{24}x^4 + o(x^4).$$

Dunque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x \arctan \frac{x}{2}) - 1 - e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{1 + \sin x^4} - 1} = -\frac{7}{24}.$$

□

$$\text{ii)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\cosh x} - 1 - \frac{x^2}{4}}{(\sin x^2)^2}$$

Osserviamo che $(\sin x^2)^2 = x^4 + o(x^4)$, per $x \rightarrow 0$, e quindi dobbiamo calcolare lo sviluppo del quarto ordine della funzione al numeratore. Poiché $\sqrt{\cosh x} = \sqrt{1 + (\cosh x - 1)}$, ricordiamo che

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2) \quad \text{per } t \rightarrow 0$$

$$\cosh x - 1 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Dunque

$$\begin{aligned} \sqrt{\cosh x} - 1 - \frac{x^2}{4} &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{x^2}{2} \right)^2 + o(x^4) \\ &\quad - 1 - \frac{x^2}{4} \\ &= \cancel{1} + \cancel{\frac{x^2}{4}} + \frac{1}{2 \cdot 4!} x^4 + o(x^4) - \frac{1}{8} \cdot \frac{x^4}{4} + o(x^4) - \cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{4}} \\ &= -\frac{1}{96} x^4 + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Dunque

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\cosh x} - 1 - \frac{x^2}{4}}{(\sin x^2)^2} = -\frac{1}{96}.$$

□

iii) Dagli sviluppi di Taylor di $\sinh x$ e $\cosh x$ segue subito che

$$\begin{aligned} \cosh x^2 - \sinh x^2 &= \cancel{x^2} - \frac{x^6}{3!} + o(x^6) - \cancel{x^2} - \frac{x^6}{3!} + o(x^6) \\ &= -\frac{x^6}{3} + o(x^6) \quad \text{per } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

D'altra parte $(\arctan x^3)^\alpha = x^{3\alpha} + o(x^{3\alpha})$ e inoltre

$$\frac{\sin x^2 - \sinh x^2}{(\arctan x^3)^\alpha} = \frac{-\frac{x^6}{3} + o(x^6)}{x^{3\alpha} + o(x^{3\alpha})}.$$

Ne segue che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x^2 - \sinh x^2}{(\arctan x^3)^\alpha} = \begin{cases} -\frac{1}{3} & \text{se } \alpha = 2 \\ 0 & \text{se } \alpha < 2 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}.$$

8) ii) Applicando la formula di Taylor ad $f(x) = \log x$, centrato in $x_0 = 1$ e con il resto di Lagrange al secondo ordine, mi ha per $x > 0$

$$\log x = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(\xi(x))}{2!}(x-1)^2$$

con $\xi(x)$ tra 1 e x .

Poiché $(\log x)'' = -\frac{1}{x^2}$, abbiamo $\frac{f''(\xi(x))}{2!}(x-1)^2 \leq 0$ e quindi

(*)

$$\log x \leq f(1) + f'(1)(x-1) = x-1$$

provando la stima dall'alto. D'altra parte

$$\log x = f(1) + f'(\xi(x))(x-1) \quad \text{con } \xi(x) \text{ tra 1 e } x$$

[formula di Taylor per $f(x) = \log x$, centrato in $x_0 = 1$ con resto di Lagrange al primo ordine, o semplicemente, per il teorema di Lagrange applicato a $f(x) = \log x$ sull'intervallo $[1, x]$ se $x > 1$ o $[x, 1]$ se $x < 1$]. Ora,

$$\text{Se } x < 1 \text{ mi ha } \log x = \frac{1}{\xi(x)}(x-1) \geq \frac{1}{x}(x-1)$$

(infatti $x < \xi(x) < 1 \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{\xi(x)} \Rightarrow \frac{(x-1)}{x} < \frac{(x-1)}{\xi(x)}$ poiché $x-1 < 0$); invece

$$\text{Se } x > 1 \text{ mi ha } \log x = \frac{1}{\xi(x)}(x-1) \geq \frac{1}{x}(x-1)$$

(infatti $1 < \xi(x) < x \Rightarrow \frac{1}{\xi(x)} > \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{(x-1)}{\xi(x)} > \frac{(x-1)}{x}$ essendo $x-1 > 0$). Poiché per $x=1$ la disuguaglianza è vera,

possiamo concludere che $\log x \geq \frac{x-1}{x} \quad \forall x > 0$. $\square$

(*) Oss. che $y = x-1$ è la retta tg. al grafico di $\log x$ in $(1,0)$, e quindi, essendo $\log x$ una funzione concava nella $\log x \leq x-1 \quad \forall x > 0$. $\square$

ii) se $x=0$ le due disuguaglianze sono vere.

Supponiamo $x > 0$.

Applicando la formula di Taylor a $f(x) = \log(1+x)$ con resto di Lagrange del terzo ordine, centrato in $x_0=0$, si ha

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underbrace{\frac{2}{(1+z(x))^3} \frac{x^3}{3!}}_{>0} \quad \text{con } 0 < z(x) < x$$

$$\geq x - \frac{x^2}{2}.$$

D'altra parte, usando il resto di Lagrange del 2° ordine si ottiene

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{(1+z(x))^2} \cdot \frac{x^2}{2} \quad \text{con } 0 < z(x) < x.$$

Poiché $1 < (z(x)+1)^2 < (1+x)^2$ si ha $-1 < -\frac{1}{(1+z(x))^2} < -\frac{1}{(1+x)^2}$ e quindi

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{(1+z(x))^2} \frac{x^2}{2} \leq x - \frac{x^2}{2(1+x)^2}$$

che è la stima dall'alto desiderata. ▀

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{a_{n+2}}{3n+1} \right)^n}_{a_n}$: Osserviamo che $\sqrt[n]{a_n} = \frac{a_{n+2}}{3n+1} \rightarrow \frac{a}{3}$

Se $\frac{a}{3} < 1$, la serie risulta convergente;

se $\frac{a}{3} > 1$, la serie risulta divergente.

Se $a=3$ notiamo che $\left(\frac{3n+2}{3n+1} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{3n+1} \right)^n \rightarrow e^{\frac{1}{3}} \neq 0$

e quindi non è soddisfatta la condizione nec. affinché una

serie sia convergente. Essendo una serie a termini positivi

possiamo concludere che la serie è divergente per $a=3$. ▀

10) $a_n = \frac{(n+2)^\alpha}{n^2 + 2n} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Abbiamo $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 2 \\ 1 & \text{se } \alpha = 2 \\ 0 & \text{se } \alpha < 2 \end{cases}$

D'altra parte
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^{\alpha}}{n^2+2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+2n)(n+2)^{-\alpha}}$$

Ora $\frac{1}{(n^2+2n)(n+2)^{-\alpha}} \sim \frac{1}{n^{2-\alpha}}$ per $n \rightarrow +\infty$. Allora, per il criterio del confronto asintotico risulta che la serie data è convergente se e solo se $2-\alpha > 1$, ossia $\alpha < 1$. $\square$

ii) Se $\alpha=0$, abbiamo
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \right]$$

Ora
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right]}_{S_n}$$

$$= 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \right]}_{S_n}$$

$$= \frac{1}{2} ;$$

quindi
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \right] = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}.$$

