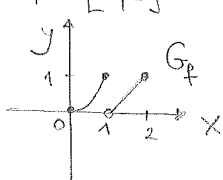


Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
 CdL in Informatica - CdL in Ingegneria dell'Informazione e delle Comunicazioni
 CdL in Ingegneria dell'Informazione e Organizzazione d'Impresa
 ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1
 a.a. 2015 - 2016 - Trento, 14 gennaio 2016

FILA (A)

21) $A = [1, 5[$ $B = [4, 8[$ $A \cap B = [4, 5[$ $\max A \cap B;$
 $A \cup B = [1, 8[$ $\min A \cup B = 1.$ $\square$

22) $A = \{x_n = 3 + \frac{1}{7+n}; n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$; $3 < x_n \leq 3 + \frac{1}{8} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$
 $x_n \searrow$. Si ha $\inf A = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 3$, $\sup A = \max A = 3 + \frac{1}{8} = \frac{25}{8}$ $\square$

23) $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & \text{se } 1 < x \leq 2. \end{cases}$

 f non è crescente in $[0, 2]$.
 (nota: $f|_{[0,1]}$ è crescente, $f|_{[1,2]}$ è crescente, ma f non è crescente in $[0, 2]$; per esempio, $x_1 = 1 < x_2 = \frac{5}{4}$, e $f(x_1) = 1 > f(x_2) = \frac{1}{4}$). $\square$

24) $f(x) = \frac{1}{1 - \log_3 x}$ $\text{dom } f =]0, +\infty[\setminus \{3\}.$ $\square$

25) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - 1}{\log(1+4x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x} \right) \cdot \left(\frac{4x}{\log(1+4x)} \right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$ $\square$

26) $f(x) = |x^2 + 4x + 4| = |(x+2)^2| = (x+2)^2$ è derivabile in $\mathbb{R}.$ $\square$

27) $f(x) = 5 \log(5+3x).$ $f'(x) = \frac{5 \cdot 3}{5+3x} = \frac{15}{5+3x}$

$f''(x) = \frac{-15 \cdot 3}{(5+3x)^2} = -\frac{45}{(5+3x)^2}.$ $\square$

28) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{2k}} < +\infty \Leftrightarrow 2k > 1 \Rightarrow k > \frac{1}{2}.$ $\square$

29) $\int \frac{1}{1+9x^2} dx = \int \frac{1}{1+(3x)^2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3}{1+(3x)^2} dx = \frac{1}{3} \arctan 3x + c.$ $\square$

30) $\begin{cases} y'(x) = 3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $y'(x) = 3 \Leftrightarrow y(x) = 3x + c;$ $y(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1.$
 $y(x) = 3x + 1.$ $\blacksquare$

$$b) \begin{cases} z^2 + z\bar{w} = 0 \\ z - \bar{z}w = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow z(z+\bar{w})=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ z=-\bar{w} \end{cases} \begin{matrix} \text{impossibile per la} \\ \text{2a eq.} \end{matrix}$$

Possiamo allora riscrivere il sistema:

$$\begin{cases} z = -\bar{w} \\ -\bar{w} + w^2 = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow w^2 - \bar{w} + \frac{1}{4} = 0.$$

Poniamo $w = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$ da determinare. Abbiamo

$$(x+iy)^2 - (x-iy) + \frac{1}{4} = 0,$$

$$\text{ovvero } x^2 + 2xyi - y^2 - x + iy + \frac{1}{4} = 0, \text{ da cui}$$

$$\begin{cases} y(2x+1) = 0 \\ x^2 - x - y^2 + \frac{1}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y=0 \quad \text{o} \quad x = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Se } y=0, \text{ allora } x^2 - x + \frac{1}{4} = 0, \text{ ovvero } x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Se } x = -\frac{1}{2}, \text{ allora } \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - y^2 + \frac{1}{4} = 0, \text{ ovvero } y = \pm 1.$$

$$\text{Abbiamo quindi } w = \frac{1}{2}, w = -\frac{1}{2} - i, w = -\frac{1}{2} + i.$$

Tenendo conto che $z = -\bar{w}$, otteniamo infine come soluzioni del sistema d'equazioni dato le seguenti:

$$(z, w) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2} - i, -\frac{1}{2} - i\right); \left(\frac{1}{2} + i, -\frac{1}{2} + i\right).$$

$$b2) f(x) = \frac{e^x}{e^x - e}$$

$$i) \text{ dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[. \text{ Inoltre}$$

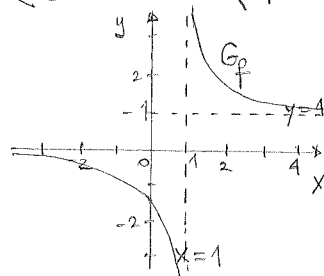
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

$$ii) \text{ Osserviamo che } \text{dom } f' = \text{dom } f \text{ e}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - e) - e^x(e^x)}{(e^x - e)^2} = \frac{-e \cdot e^x}{(e^x - e)^2} < 0 \text{ su } \text{dom } f'.$$

$$\text{Quindi } f|_{]-\infty, 1[} \text{ \u00e8 strettamente decrescente,}$$

$$f|_{]1, +\infty[} \text{ \u00e8 strettamente decrescente.}$$



(*) si pu\u00f2 provare semplicemente che $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
Provando che $f(x_1) \neq f(x_2)$ o $\frac{\partial f}{\partial x_1} \neq \frac{\partial f}{\partial x_2}$ ne segue
 $e^{x_1}(e^{x_2} - e) = e^{x_2}(e^{x_1} - e) \Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ $\square$

Quindi $f(-\infty, 1[) =]-\infty, 0[$, $f(]1, +\infty[) =]1, +\infty[$, dove abbiamo tenuto conto della continuità e monotonia di f e dei limiti calcolati in i). Da $f(-\infty, 1[) \cap f(]1, +\infty[) = \emptyset$ e la monotonia stretta segue infine l'injectività di f . $\square$

iii) $\text{im } f =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$; per determinare la funzione inversa di f dobbiamo esprimere x in funzione di $y \in \text{im } f$.

Abbiamo $\frac{e^x}{e^x - e} = y \Leftrightarrow e^x = (e^x - e)y \Leftrightarrow e^x(1 - y) = -ey$
 $\Leftrightarrow e^x = \frac{-ey}{1 - y} \Leftrightarrow x = \log\left(\frac{-ey}{y - 1}\right)$. Abbiamo quindi
 $f^{-1}(x) : \text{im} f \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = \log\left(\frac{e^x}{x - 1}\right)$.

$$\text{iv) } \sum_{n=0}^{\infty} -f(-n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n}}{e - e^{-n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e - \frac{1}{e^n}}. \quad \text{Notiamo che}$$

$$a_n = \frac{1/e^n}{e - 1/e^n} > 0 \quad \forall n \geq 0; \text{ inoltre } a_n = \frac{1}{e \cdot e^n - 1} \sim b_n = \frac{1}{e \cdot e^n}$$

per $n \rightarrow +\infty$. Poiché $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n < +\infty$ (serie geometrica con ragione $q = \frac{1}{e} < 1$), per il criterio del confronto aritmetico anche la serie data è convergente.

b3) $\sim$ $f(x) = \frac{\log|x|+1}{x^2}$

- $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
- f è pari; basta studiare f per $x > 0$.

$x > 0$ • segue

0 $\frac{1}{e}$

$$f(x) = \frac{\log x + 1}{x^2}$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ $x=0$ asintoto verticale (da destra) per f

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ $y=0$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow +\infty$.

- continuità di f su $]0, +\infty[$, poiché somma e rapporto di funzioni continue.

$$\bullet \text{ dom } f' =]0, +\infty[\quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x} (x^2) - (\log x + 1) 2x}{x^3} = \frac{-2 \log x - 1}{x^3}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \log x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}} \quad \text{pt. critico per } f.$$

Infine

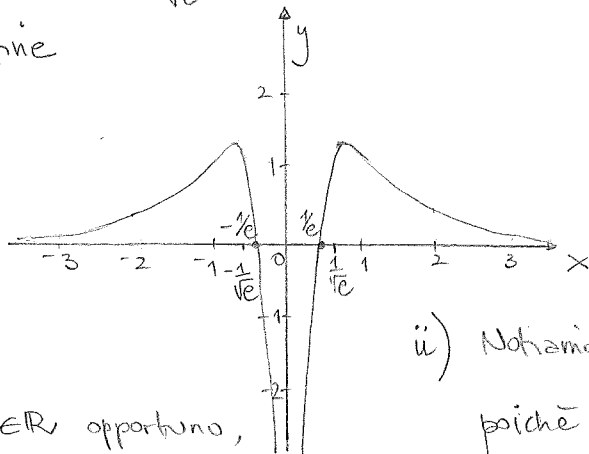


grafico qualitativo di f su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

ii) Notiamo $0 < \frac{\log X + 1}{X^2} \leq \frac{1}{X^{3/2}}$ per $X \geq \bar{X}$,

poiché $\frac{\log X + 1}{X^{1/2}} \leq 1$ per $X \geq \bar{X}$.

(ricordate che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x + 1}{x^{\frac{1}{2}}} = 0$).

Poiché $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx < +\infty$, per il criterio del confronto si ha $\int_1^{+\infty} f(x) dx < +\infty$.

Intne $\int \frac{\log x + 1}{x^2} dx = \int \frac{t+1}{e^{2t}} \cdot e^t dt = \int (t+1)e^{-t} dt =$
 $= -(t+1)e^{-t} + \int e^{-t} dt = -(t+1)e^{-t} - e^{-t} + C = \frac{-t-2}{e^t} + C$
 $= \frac{-\log x - 2}{x} + C;$

quindi $\int_1^{+\infty} \frac{\log x + 1}{x^2} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{\log x + 1}{x^2} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[\frac{-\log x - 2}{x} \right]_1^M =$

$$= \lim_{M \rightarrow +\infty} \left(\frac{-\log M - 2}{M} \right) + 2 = \underline{\underline{2}}.$$

$$b) f(x) = \frac{\sin x}{(\arctan x)^3 (1-x)^4}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + o(x)}{(2x + o(x))^3 \sqrt{(1-x)^4}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

ii) Oss. che $f(x) > 0$ su $]0, 1[$, è continua su $]0, 1[$ e può essere estesa con continuità a $[0, 1[$ ponendo $f(0) = \frac{1}{2}$.

L'integrale dato è quindi improprio solo in $x=1$. Si ottiene

che risulta convergente $\Leftrightarrow \frac{x}{3} < 1$, ossia $x < 3$. ■

b5) $y'' + 2y' - 3y = \cos x$

L'eq. diff. omogenea associata è $y'' + 2y' - 3y = 0$.

L'eq. caratteristica risulta essere $z^2 + 2z - 3 = 0$, le cui soluzioni sono $z_1 = 1$ e $z_2 = -3$.

L'insieme delle soluzioni dell'eq. diff. omogenea è dato quindi da $y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^x$, al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Poiché i e $-i$ non sono soluzioni dell'eq. caratteristica, cerchiamo una soluzione particolare $\bar{y}(x)$ dell'eq. diff. data della forma $\bar{y}(x) = h \sin x + k \cos x$ con $h, k \in \mathbb{R}$ da determinare.

Ora $\bar{y}'(x) = h \cos x - k \sin x$ e $\bar{y}''(x) = -h \sin x - k \cos x$, e quindi

$$\bar{y}'' + 2\bar{y}' - 3\bar{y} = \cos x \Leftrightarrow -h \sin x - k \cos x + 2h \cos x - 2k \sin x - 3h \sin x - 3k \cos x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4h - 2k = 0 \\ -4k + 2h = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2h \\ 8h + 2h = 1 \end{cases} \Leftrightarrow h = \frac{1}{10} \quad k = -\frac{1}{5}.$$

Quindi l'integrale generale dell'eq. diff. data è

$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^x + \frac{1}{10} \sin x - \frac{1}{5} \cos x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. ■

b6) i) $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice strett. crescente su A se

$\forall x_1, x_2 \in A, [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)]$. □

ii) Teorema fondamentale del calcolo integrale: Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

continua. Fissato $c \in [a, b]$ sia $F_c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione integrale di f definita da $F_c(x) = \int_c^x f(t) dt$. Allora

i) F_c è derivabile su $[a, b]$

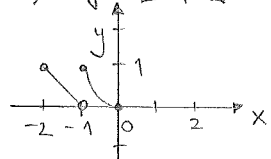
ii) $F'_c(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$. ■

FILA (B)

21) $A =]3, 7[$ $B =]6, 10[$ $A \cap B =]6, 7[$ $\min A \cap B$;
 $A \cup B =]3, 10[$ $\max A \cup B = 10$. $\square$

22) $A = \{x_n = 2 - \frac{1}{n+5} ; n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$; $2 - \frac{1}{6} \leq x_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$,
 $x_n \uparrow$. Si ha $\inf A = \min A = 2 - \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$, $\sup A = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 2$. $\square$

23) $g: [-2, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{se } -2 \leq x < -1 \\ x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$



g non è decrescente su $[-2, 0]$.
 (nota: $g|_{[-2, -1[}$ è decrescente, $g|_{[-1, 0]}$ è decrescente,
 ma g non è decrescente su $[-2, 0]$; per esempio, $x_1 = -5/4 < x_2 = -1$, e
 $f(x_1) = \frac{1}{4} < f(x_2) = 1$). $\square$

24) $f(x) = \frac{1}{1 - \log_2 x}$ $\text{dom } f =]0, +\infty[\setminus \{2\}$. $\square$

25) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+3x)}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\log(1+3x))' \cdot 1}{3x} \cdot \frac{2x}{(\sin 2x)'} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$. $\square$

26) $f(x) = |x^2 - 6x + 9| = |(x-3)^2| = (x-3)^2$ è derivabile su $\mathbb{R}$. $\square$

27) $f(x) = 3 \arctan 2x$ $f'(x) = 3 \cdot \frac{2}{1+4x^2} = \frac{6}{1+4x^2}$

$f''(x) = \frac{-6 \cdot 8x}{(1+4x^2)^2} = \frac{-48x}{(1+4x^2)^2}$. $\square$

28) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{1+\beta}} < +\infty \Leftrightarrow 1+\beta > 1 \Rightarrow \underline{\beta > 0}$. $\square$

29) $\int \frac{1}{\cos^2(3x)} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3}{\cos^2(3x)} dx = \underline{\underline{\frac{1}{3} \tan 3x + c}}$. $\square$

30) $\begin{cases} y'(x) = 2 \\ y(0) = 5 \end{cases}$ $y'(x) = 2 \Leftrightarrow y(x) = 2x + c$; $y(0) = 5 \Leftrightarrow c = 5$.
 $y(x) = 2x + 5$. $\blacksquare$

$$b1) \begin{cases} w^2 - w\bar{z} = 0 \\ w - \bar{w}z = 1/4 \end{cases} \Leftrightarrow w(w - \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} w = 0 \\ w = \bar{z} \end{cases} \text{ impossibile per la 2ª eq.}$$

Posiamo allora riscrivere il sistema:

$$\begin{cases} w = \bar{z} \\ \bar{z} - z^2 = 1/4 \end{cases} \Leftrightarrow z^2 - \bar{z} + 1/4 = 0.$$

Posiamo $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$ da determinare. Abbiamo

$$(x + iy)^2 - (x - iy) + 1/4 = 0,$$

$$\text{ossia } x^2 + 2xyi - y^2 - x + iy + 1/4 = 0, \text{ da cui}$$

$$\begin{cases} y(2x + 1) = 0 \\ x^2 - x - y^2 + 1/4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0 \quad \vee \quad x = -1/2.$$

$$\text{Se } y = 0, \text{ allora } x^2 - x + 1/4 = 0, \text{ ossia } x = 1/2.$$

$$\text{Se } x = -1/2, \text{ allora } 1/4 + 1/2 - y^2 + 1/4 = 0, \text{ ossia } y = \pm 1.$$

$$\text{Abbiamo quindi } z = 1/2, \quad z = -1/2 - i, \quad z = -1/2 + i.$$

Tenendo conto che $w = \bar{z}$, otteniamo infine come soluzioni del sistema di equazioni dato le seguenti:

$$(z, w) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \quad \left(-\frac{1}{2} - i, -\frac{1}{2} + i\right); \quad \left(-\frac{1}{2} + i, -\frac{1}{2} - i\right).$$

$$b2) \boxed{f(x) = \frac{e^x}{e - e^x}}$$

$$i) \text{ dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[. \text{ Inoltre}$$

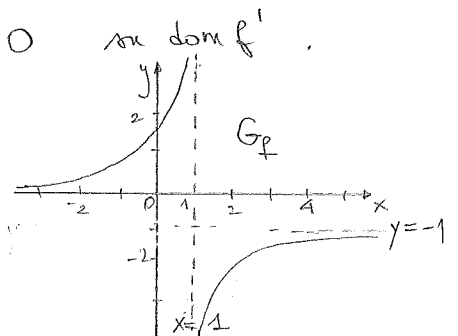
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1.$$

$$ii) \text{ Osserviamo che } \text{dom } f' = \text{dom } f. \text{ e}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(e - e^x) - e^x(-e^x)}{(e - e^x)^2} = \frac{ee^x}{(e - e^x)^2} > 0 \text{ su } \text{dom } f'.$$

$$\text{Quindi } f|_{]-\infty, 1[} \text{ è strettamente crescente,}$$

$$f|_{]1, +\infty[} \text{ è strettamente crescente.}$$



* si può provare l'injectività direttamente provando che $\forall x_1, x_2 \in \text{dom } f, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
Sia $f(x_1) = f(x_2)$, ossia $\frac{e^{x_1}}{e - e^{x_1}} = \frac{e^{x_2}}{e - e^{x_2}}$; ne segue $e^{x_1}(e - e^{x_2}) = e^{x_2}(e - e^{x_1}) \Rightarrow ee^{x_1} = ee^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$. $\square$

Quindi $f(-\infty, 1[) =]0, +\infty[$, $f(]1, +\infty[) =]-\infty, -1[$, dove abbiamo tenuto conto della continuità e monotonia di f e dei limiti calcolati in i).
Da $f(-\infty, 1[) \cap f(]1, +\infty[) = \emptyset$ e la monotonia stretta segue infine l'injectività di f . $\square$

iii) $\text{im } f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$; per determinare la funzione inversa di f dobbiamo esprimere x in funzione di $y \in \text{im } f$.

$$\text{Abbiamo } \frac{e^x}{e - e^x} = y \Leftrightarrow e^x = y(e - e^x) \Leftrightarrow e^x(1 + y) = ey$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{ey}{1+y} \Leftrightarrow x = \log\left(\frac{ey}{1+y}\right). \text{ Abbiamo quindi}$$

$$f^{-1}(x) : \text{im } f \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = \log\left(\frac{ex}{1+x}\right).$$

iv) $\sum_{n=0}^{\infty} f(-n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n}}{e - e^{-n}} < +\infty$ (vedi Es. b2) iv) Fila A). $\blacksquare$

b3) i) $\boxed{f(x) = \frac{\log|x| + 1}{x^3}}$

- $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
- f è dispari; basta studiare f per $x > 0$.

$\boxed{x > 0}$

• segno $\begin{array}{c} \text{---} - \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} \text{---} \\ \text{0} \quad \frac{1}{e} \end{array} \rightarrow f$

$$f(x) = \frac{\log x + 1}{x^3}$$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ $x=0$ asintoto verticale (da destra) per f
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ $y=0$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow +\infty$.

• continuità di f in $]0, +\infty[$, poiché somma e rapporto di funzioni continue.

• $\text{dom } f' =]0, +\infty[$ $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^3 - (\log x + 1) 3x^2}{x^4} = \frac{-3 \log x - 2}{x^4}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \log x = -\frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$ pt. critico per f .

$\begin{array}{c} \text{---} - \text{---} + \text{---} - \text{---} - \text{---} \text{---} \\ \text{0} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}} \end{array} \rightarrow f'$

$x = \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$ pt. di massimo loc (stretto) per f ;

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}\right) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{e^2}} = \underline{\underline{\frac{e^2}{3}}}.$$

Infine

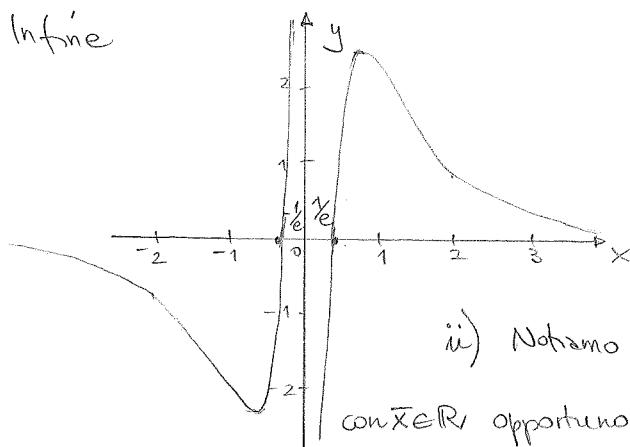


grafico qualitativo di f

ii) Notiamo $0 < \frac{\log x + 1}{x^3} \leq \frac{1}{x^2}$ per $x \geq \bar{x}$,
con $\bar{x} \in \mathbb{R}$ opportuno, poiché $\frac{\log x + 1}{x} \leq 1$ per $x \geq \bar{x}$

(ricordate che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x + 1}{x} = 0$).

Poiché $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx < +\infty$, per il criterio del confronto si ha $\int_1^{+\infty} f(x) dx < +\infty$.

$$\begin{aligned} \text{Infine } \int_1^{+\infty} \frac{\log x + 1}{x^3} dx &= \int_1^{+\infty} \frac{t+1}{e^{\frac{3}{2}t}} dt = \int_1^{+\infty} (t+1) e^{-2t} dt = \\ &= -\frac{(t+1)e^{-2t}}{2} + \frac{1}{2} \int e^{-2t} dt = -\frac{(t+1)e^{-2t}}{2} - \frac{1}{4} e^{-2t} + C \\ &= \frac{-t - \frac{3}{2}}{2e^{2t}} + C = \frac{-\log x - \frac{3}{2}}{2x^2} + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{quindi } \int_1^{+\infty} \frac{\log x + 1}{x^3} dx &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{\log x + 1}{x^3} dx \\ &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[\frac{-\log x - \frac{3}{2}}{2x^2} \right]_1^M = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left(\frac{-\log M - \frac{3}{2}}{2M^2} \right) + \frac{3}{4} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}. \end{aligned}$$

b4) $f(x) = \frac{\sin x^2}{(e^{3x^2} - 1)^{\frac{1}{4}} (1-x)^{\alpha}}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + o(x^2)}{(3x^2 + o(x^2))^{\frac{1}{4}} (1-x)^{\alpha}} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$.

ii) Oss. che $f(x) > 0$ su $]0, 1[$, è continua su $]0, 1[$ e può essere estesa con continuità a $[0, 1[$ ponendo $f(0) = \frac{1}{3}$. L'integrale dato è quindi improprio solo in $x=1$. Si ottiene che risulta convergente $\Leftrightarrow \frac{\alpha}{4} < 1$, ossia $\underline{\underline{\alpha < 4}}$.

b5) $y'' - 2y' - 3y = \sin x$

L'eq. diff. omogenea associata è $y'' - 2y' - 3y = 0$. L'eq. caratteristica

rimuovendo $z^2 - 2z - 3 = 0$, le cui soluzioni sono $z_1 = -1$ e $z_2 = 3$.

L'insieme delle soluzioni dell'eq. diff. omogenea è dato quindi da

$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$, al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Poiché i e $-i$ non sono

soluzioni dell'eq. caratteristica, cerchiamo una soluzione particolare $\bar{y}(x)$

dell'eq. diff. data della forma $\bar{y}(x) = h \sin x + k \cos x$ con $h, k \in \mathbb{R}$ da determinare.

Ora $\bar{y}'(x) = h \cos x - k \sin x$ e $\bar{y}''(x) = -h \sin x - k \cos x$, e quindi

$$\bar{y}'' - 2\bar{y}' - 3\bar{y} = \sin x \Leftrightarrow -h \sin x - k \cos x - 2h \cos x + 2k \sin x - 3h \sin x - 3k \cos x = \sin x$$

$$= \sin x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4h + 2k = 1 \\ -4k - 2h = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = -2k \\ 8k + 2k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow k = \frac{1}{10} \quad h = -\frac{1}{5}.$$

Quindi l'integrale generale dell'eq. diff. data è

$$\underline{y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - \frac{1}{5} \sin x + \frac{1}{10} \cos x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.}$$



b) i) $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice strettamente decrescente su A se

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)]. \quad \square$$

ii) Teorema di Torricelli-Barrow: Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Sia $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione primitiva di f ; allora

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

$$\left(= [G(x)]_a^b = G(x) \Big|_a^b \right).$$

