

Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
 CdL in Informatica - CdL in Ingegneria dell'Informazione e delle Comunicazioni
 CdL in Ingegneria dell'Informazione e Organizzazione d'Impresa
 ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1
 a.a. 2015-2016 - Trento, 5 febbraio 2016

FILA (A)

21) $\sqrt{x^2-1} \leq 2\sqrt{2} \iff \begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x^2-1 \leq 8 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 \geq 1 \\ x^2 \leq 9 \end{cases} \implies S = [-3, -1] \cup [1, 3] \quad \square$

22) $z = 4 + 3i \implies \bar{z} = 4 - 3i, |z| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} \implies |z| = 5 \quad \square$

23) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ è iniettiva su $]-\infty, 0]$.

Si può provare che $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in]-\infty, 0]$.

$$\left(\frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{x_2+1}{x_2-1} \iff (x_1+1)(x_2-1) = (x_2+1)(x_1-1) \right.$$

$$\iff x_1 x_2 - x_1 + x_2 - 1 = x_2 x_1 - x_2 + x_1 - 1$$

$$\iff$$

$$2x_2 = 2x_1 \iff x_2 = x_1$$

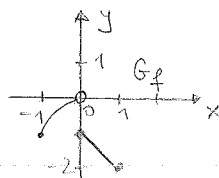
oppure che $f'(x) < 0$ su $]-\infty, 0]$

$$\left(f'(x) = \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0 \text{ su }]-\infty, 0] \right), \text{ e quindi}$$

f strettamente decrescente sull'intervallo $]-\infty, 0]$. $\square$

24) $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ -x-1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



$\inf_{[-1,1]} f = -2$
 $\sup_{[-1,1]} f = 0.$

 $\square$

25) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{e^x}{|x|-2} = \boxed{-\infty}$.
infinitesimo negativo

26) f continua in $x=1 \iff \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 2\beta) = 1 + 2\beta = f(1) =$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\alpha x + 3) = \alpha + 3$$

Quindi deve essere $1 + 2\beta = \alpha + 3 \iff \alpha = 2\beta - 2$.

Per tali valori di $\alpha \neq \beta$, essendo f derivabile $\forall x \neq 1$, f è derivabile in $x=1 \iff$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x). \text{ Abbiamo } \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \alpha = \alpha. \text{ Deve essere allora}$$

$\alpha = 2, \beta = 2.$

 $\square$

$$27) \int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int 2 \sin x \cos x dx = \boxed{\frac{1}{2} \sin^2 x + C} \quad (\text{oppure } \boxed{-\frac{1}{2} \cos^2 x + C}).$$

$c \in \mathbb{R}$

$$28) F(x) = \int_0^x e^{t^2} \cos t dt \quad F(0) = 0$$

$$F'(x) = \underset{\text{TFC}}{e^{x^2}} \cos x \Rightarrow F'(0) = 1.$$

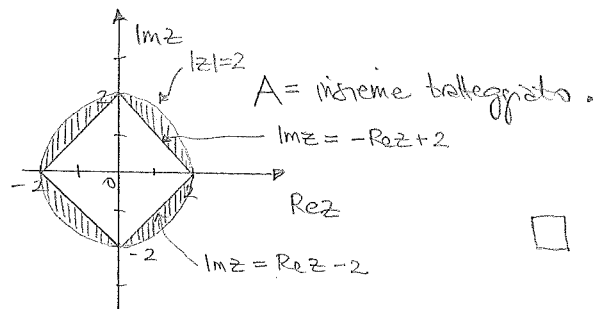
Quindi $P_1(x) = F(0) + F'(0)x = x$, ossia $\boxed{P_1(x) = x}$. □

$$29) \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n < +\infty \Leftrightarrow |3x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \boxed{x \in]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[}.$$

$$30) y'' + 2y = 0 \quad \text{Equazione caratteristica: } z^2 + 2 = 0; \text{ le soluzioni sono } z = \pm \sqrt{2}i.$$

L'insieme delle soluzioni è dato da $\boxed{\{c_1 \sin \sqrt{2}x + c_2 \cos \sqrt{2}x; c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}}$ □

$$b1) i) \begin{cases} |z| \leq 2 \\ |Re z| + |Im z| \geq 2 \end{cases}$$



$$ii) z^2 + 2z + 4 = 0 \Leftrightarrow z_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i.$$

$$\boxed{z_1 = -1 - \sqrt{3}i} \Rightarrow \begin{cases} |z_1| = \sqrt{1+3} = 2 \\ |Re z_1| + |Im z_1| = 1 + \sqrt{3} \geq 2 \end{cases} \quad \checkmark$$

$$\boxed{z_2 = -1 + \sqrt{3}i} \Rightarrow \begin{cases} |z_2| = \sqrt{1+3} = 2 \\ |Re z_2| + |Im z_2| = 1 + \sqrt{3} \geq 2 \end{cases} \quad \checkmark$$

$$b2) i) f(x) = \log\left(\frac{1+2x^2}{1+x}\right) + \sin x + \alpha x^2. \quad \text{Si ha}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(1+2x^2) - \log(1+x) + \sin x + \alpha x^2 \\ &= 2x^2 - \frac{4x^4}{2} + o(x^4) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + \alpha x^2 \end{aligned}$$

$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3) \quad \text{per } t \rightarrow 0$
 $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3) \quad \text{per } t \rightarrow 0$

Quindi $f(x) = (2 + \frac{1}{2} + \alpha) x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$.

Allora

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^\beta} = \begin{cases} -\infty & \text{se } \alpha < -5/2 \\ -1/2 & \text{se } \alpha = -5/2 \\ +\infty & \text{se } \alpha > -5/2 \end{cases}$$

ii) $\int_0^1 \frac{f(x)}{x^\beta} dx$: per $\alpha = -5/2$, si ha che

per $x \rightarrow 0^+$ $\frac{f(x)}{x^\beta} \sim \frac{-x^{3/2}}{x^\beta} \sim -\frac{1}{2x^{\beta-3}}$

Quindi l'integrale dato risulta convergente $\Leftrightarrow \beta - 3 < 1$, ossia

$$\boxed{\beta < 4}$$

b3) $f(x) = x + 1 - \frac{4}{|x| + 1}$

• dom $f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$; non simmetrica!

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 - \frac{4}{x + 1} & \text{se } x \geq 0 \\ x + 1 - \frac{4}{-x + 1} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

ossia $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 1} & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{-x^2 - 3}{-x + 1} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

• segno di f



• comportamento agli estremi del dominio

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

asintoto obliquo $y = x + 1$ (ovvio!)

per f , per $x \rightarrow \begin{pmatrix} +\infty \\ -\infty \end{pmatrix}$.

• f è continua su tutto $\mathbb{R}$!

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{(2x+2)(x+1) - (x^2+2x-3)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+5}{(x+1)^2} & \text{se } x > 0 \\ \frac{-2x(-x+1) - x^2-3}{(-x+1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(-x+1)^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Poiché f è continua in $x=0$ e derivabile in un intorno di $x=0$ (anzi $\forall x \neq 0$), si ha $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -3$ e $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 5$.

Risulta dunque che $x=0$ è un pt. di non derivabilità di f ;
più precisamente è un pt. angoloso per f .

$x=-1$ è l'unico pt. critico
per f ; risulta che è un
pt. di min. loc. stretto per f ;
 $f(-1) = -2$.

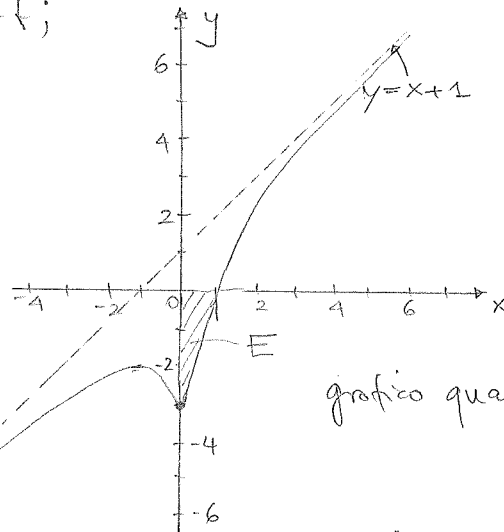
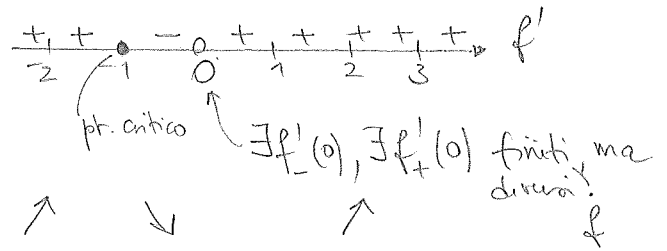
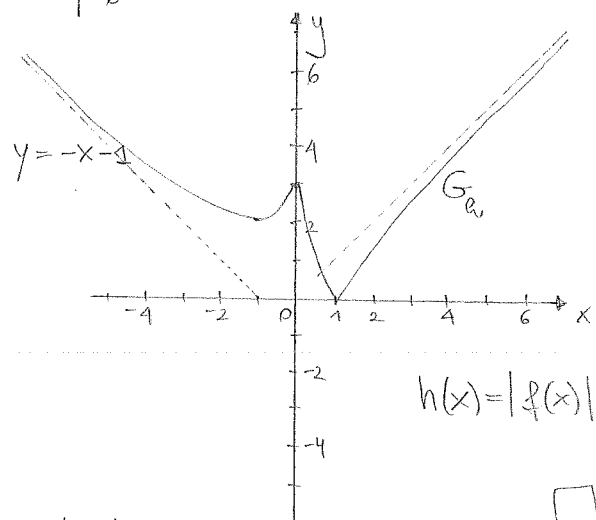
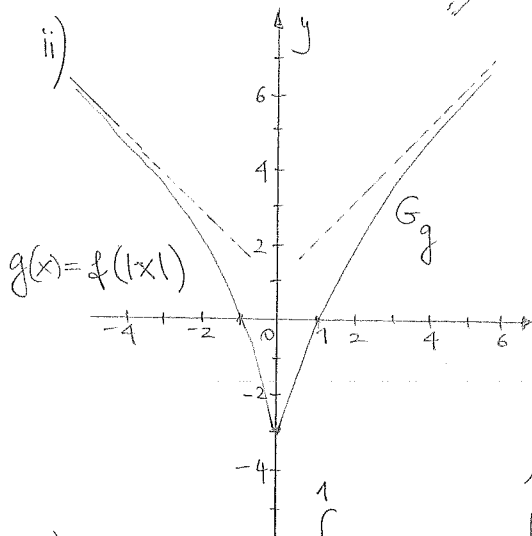


grafico qualitativo di f



iii) area $E = - \int_0^1 f(x) dx = - \int_0^1 (x+1 - \frac{4}{x+1}) dx =$
 $= - \left[\frac{x^2}{2} + x - 4 \log|x+1| \right]_0^1 = - \left[\frac{1}{2} + 1 - 4 \log 2 \right] = 4 \log 2 - \frac{3}{2}$
 $= \underline{\underline{\log 16 - \frac{3}{2}}}$.

b4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{2n^2}$
 $a_n > 0$

i) $\sqrt[n]{a_n} = \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{2n} = e^{2n \log(1 - \frac{1}{3n})} =$
 $= e^{2n(-\frac{1}{3n} + o(\frac{1}{n}))} = e^{-\frac{2}{3} + o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}} < 1$.

Per il criterio della radice n -esima possiamo concludere che la serie data è convergente. □

ii) raggio di convergenza della serie di potenze data =

$$= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}} = \boxed{e^{2/3}}.$$

$$b5) \begin{cases} y' + (x \sin x) y = 0 \\ y(\frac{\pi}{2}) = 2 \end{cases}$$

$y' = - \underbrace{(x \sin x)}_{a(x)} y$ è un'eq. diff. lineare del primo ordine con coeff. $a(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua ($b(x) \equiv 0$).

Perché $A(x) = \int a(x) dx = - \int x \sin x dx =$ integrando per parti

$$= - \left[-x \cos x + \int \cos x dx \right] = x \cos x - \sin x (+c)$$

è una primitiva di $a(x)$, la formula risolutiva si scrive

$$y(x) = c e^{A(x)} = c e^{x \cos x - \sin x} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Imponendo $y(\frac{\pi}{2}) = 2$ si ha $2 = c e^{-1}$, ossia $c = 2e$.

La soluzione del p.p.m. di Cauchy risulta essere quindi

$$\boxed{y(x) = 2 e^{x \cos x - \sin x + 1}, \quad x \in \mathbb{R}}.$$

$$b6) i) f = o(g) \text{ per } x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \quad \square$$

ii) Enunciate e dimostrate il Teorema fondamentale del calcolo integrale. ■

FILA (B)

21) $\sqrt{4x^2-1} \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-1 \geq 0 \\ 4x^2-1 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq \frac{1}{4} \\ x^2 \leq 1 \end{cases} \quad S = [-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1].$ □

22) $z = 3-4i \quad \boxed{\bar{z} = 3+4i}, \quad |z| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} \quad \boxed{|z| = 5}.$ □

23) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ è iniettiva su $[0, +\infty[$.

Si può provare che $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1-1}{x_1+1} = \frac{x_2-1}{x_2+1} \right) &\Leftrightarrow (x_1-1)(x_2+1) = (x_2-1)(x_1+1) \\ &\Leftrightarrow x_1x_2 + x_1 - x_2 - 1 = x_2x_1 + x_2 - x_1 - 1 \\ &\Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, \end{aligned}$$

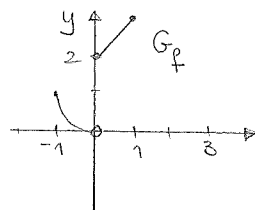
oppure che $f'(x) > 0$ su $[0, +\infty[$

$\left(f'(x) = \frac{x+1 - (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \text{ su } [0, +\infty[\right),$ e quindi

f strettamente crescente su $[0, +\infty[$. □

24) $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ x+2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$



$\inf_{[-1,1]} f = 0$
 $\sup_{[-1,1]} f = 3$

25) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{e^x}{(x+2)}$ +∞.
 infinitesimo positivo

26) f continua in $x=1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^2 + \alpha) = -1 + \alpha = f(1)$

$= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\beta x + 2) = \beta + 2.$

Quindi deve essere $-1 + \alpha = \beta + 2 \Leftrightarrow \alpha = \beta + 3.$

Per tali valori di α e β , essendo f derivabile $\forall x \neq 1$, f è derivabile in $x=1 \Leftrightarrow$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x).$ Abbiamo $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2x) = -2,$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \beta = \beta.$ Deve essere allora

$\beta = -2, \quad \alpha = 1.$ □

Si può anche scegliere. Osservare che $f(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$ per cui banalmente $x_1 \neq x_2 \in [0, +\infty[\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$

$$a7) \int \frac{1}{x} \log x dx = \boxed{\frac{1}{2} \log^2 x + c} \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$a8) F(x) = \int_0^x 3e^{t^2} \cos t dt \quad F(0)=0 \quad F'(x) = \underset{\text{TFC}}{3e^{x^2} \cos x} \Rightarrow F'(0)=3.$$

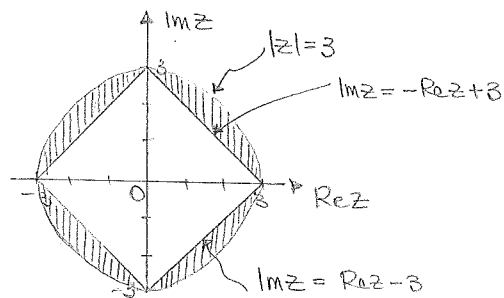
Quindi $P_1(x) = F(0) + F'(0)x = 3x$, ossia $\boxed{P_1(x) = 3x}$.

$$a9) \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n < +\infty \Leftrightarrow |2x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[}.$$

a10) $y'' + 3y = 0$ Equazione caratteristica: $z^2 + 3 = 0$; le soluzioni sono $z_{1/2} = \pm \sqrt{3}i$.

L'insieme delle soluzioni è dato da $\boxed{\{c_1 \sin \sqrt{3}x + c_2 \cos \sqrt{3}x; c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}}$.

b1) i)
$$\begin{cases} |z| \leq 3 \\ |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \geq 3 \end{cases}$$



ii) $z^2 - 4z + 9 = 0 \Leftrightarrow z_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 36}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}i}{2} = 2 \pm \sqrt{5}i.$

$\boxed{z_1 = 2 - \sqrt{5}i} \Rightarrow \begin{cases} |z_1| = \sqrt{4+5} = 3 \\ |\operatorname{Re} z_1| + |\operatorname{Im} z_1| = 2 + \sqrt{5} \geq 3 \quad \checkmark \end{cases}$

$\boxed{z_2 = 2 + \sqrt{5}i} \Rightarrow \begin{cases} |z_2| = \sqrt{4+5} = 3 \\ |\operatorname{Re} z_2| + |\operatorname{Im} z_2| = 2 + \sqrt{5} \geq 3 \quad \checkmark \end{cases}$

b2) i) $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1+3x^2}\right) - \sin x + \alpha x^2$, si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(1+x) - \log(1+3x^2) - \sin x + \alpha x^2 \\ &= \cancel{x} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - 3x^2 + \frac{9x^4}{2} + o(x^4) - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) + \alpha x^2 \end{aligned}$$

per $x \rightarrow 0$

$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$ per $t \rightarrow 0$

$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$ per $t \rightarrow 0$

Quindi $f(x) = \left(-\frac{1}{2} - 3 + \alpha\right)x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \alpha(x^3)$ per $x \rightarrow 0$.

Allora

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^{2\beta}} = \begin{cases} -\infty & \text{se } \alpha < \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{se } \alpha = \frac{7}{2} \\ +\infty & \text{se } \alpha > \frac{7}{2} \end{cases}$$

ii) $\int_0^1 \frac{f(x)}{x^{2\beta}} dx$: per $\alpha = \frac{7}{2}$ si ha che

$$\text{per } x \rightarrow 0^+ \quad \frac{f(x)}{x^{2\beta}} \sim \frac{\frac{1}{2}x^3}{x^{2\beta}} \sim \frac{1}{2x^{2\beta-3}}$$

Quindi l'integrale dato risulta convergente $\Leftrightarrow 2\beta - 3 < 1$, ossia

$$\boxed{\beta < 2}.$$

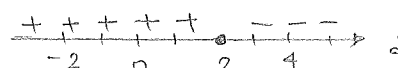
b3) $f(x) = -x + 1 + \frac{3}{|x| + 1}$

• $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ no simmetrie!

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 + \frac{3}{x+1} & \text{se } x \geq 0 \\ -x + 1 + \frac{3}{-x+1} & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

ossia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x^2 + 4}{x+1} & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{x^2 - 2x + 4}{-x+1} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

• segno di f 

• Comportamento agli estremi del dominio

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

asintoto obliquo $y = -x + 1$

(omb!)

per f , per $x \rightarrow -\infty$ ($+\infty$)

• f continua su tutto $\mathbb{R}$!

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2x(x+1) - (-x^2 + 4)}{(x+1)^2} = \frac{-x^2 - 2x - 4}{(x+1)^2} & \text{se } x > 0 \\ \frac{(2x-2)(-x+1) + (x^2 - 2x + 4)}{(-x+1)^2} = \frac{-x^2 + 2x + 2}{(-x+1)^2} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Poiché f è continua in $x=0$ e derivabile in un intorno di $x=0$ (anzi $\forall x \neq 0$) si

ha $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 2$, $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -4$; quindi $x=0$ è un punto

di non derivabilità di f ; più precisamente è un pt. angoloso per f .

$x = 1 - \sqrt{3}$ è l'unico pt. critico

per f ; risulta essere pt. di

min. loc. stretto per f ; inoltre $f(1 - \sqrt{3}) = -\frac{1}{1 + \sqrt{3}} + \frac{3}{-\frac{1}{1 + \sqrt{3}} + 1} = 2\sqrt{3}$.

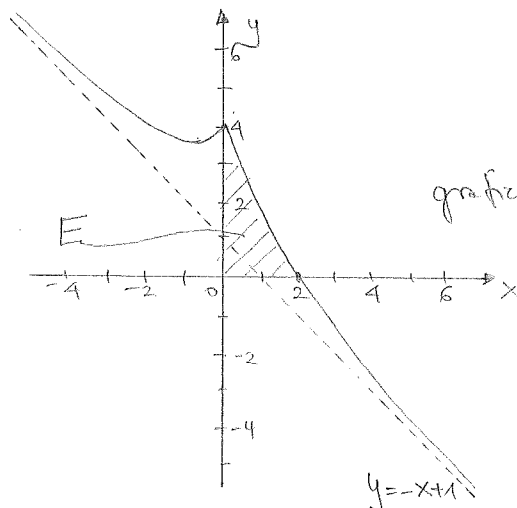
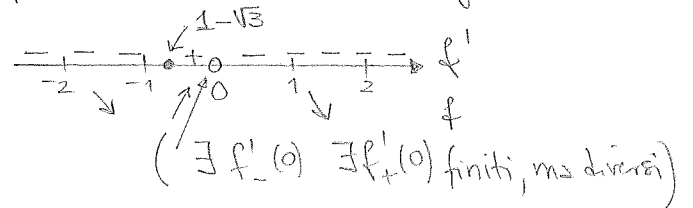
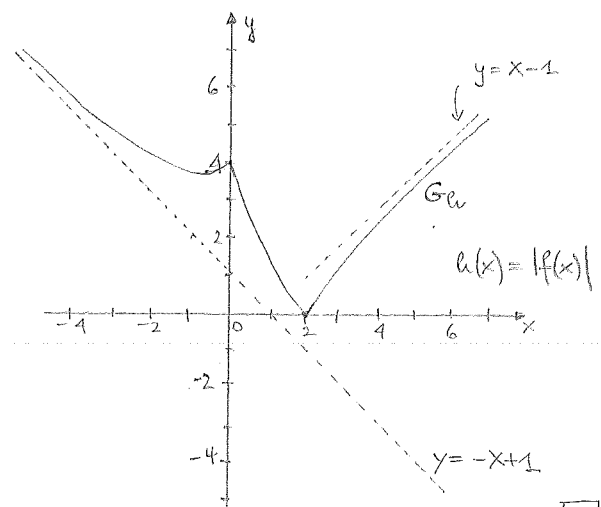
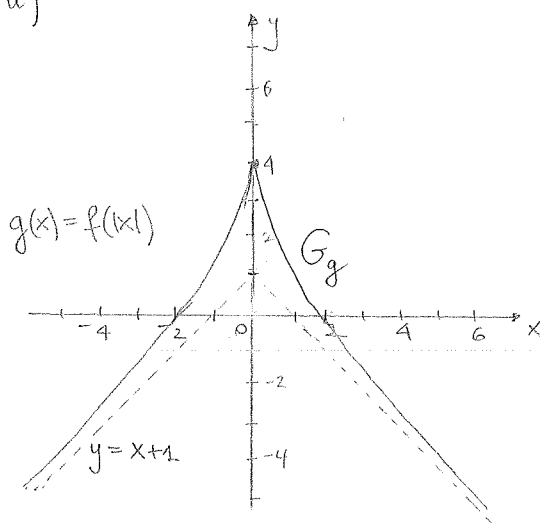


grafico qualitativo di f .



ii)



$$\text{iii) area } E = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \left(-x + 1 + \frac{3}{x+1}\right) dx = \left[-\frac{x^2}{2} + x + 3 \log|x+1|\right]_0^2 = -2 + 2 + 3 \log 3 = \underline{\underline{\log 27}}.$$

$$\text{b4) } \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{4n}\right)^{3n^2}}_{a_n > 0}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } \sqrt[n]{a_n} &= \left(1 - \frac{1}{4n}\right)^{3n} = e^{3n \log\left(1 - \frac{1}{4n}\right)} \\ &= e^{3n \left(-\frac{1}{4n} + o(1)\right)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{e^3}} < 1. \end{aligned}$$

Per il criterio della radice n -esima possiamo concludere che la serie data è convergente. □

ii) raggio di convergenza della serie di potenze data =

$$= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}} = \boxed{e^{\frac{3}{4}}}.$$

b5)
$$\begin{cases} y' + (x \cos x) y = 0 \\ y(\pi) = 3. \end{cases}$$

$y' = \underbrace{-(x \cos x)}_{a(x)} y$ è un'eq. diff. lineare del primo ordine con coeff. $a(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua ($b(x) = 0$).

Poiché $A(x) = \int a(x) dx = - \int x \cos x dx =$ integrando per parti
 $= - \left[x \sin x - \int \sin x dx \right] = -x \sin x - \cos x (+c)$

è una primitiva di $a(x)$, la formula risolutiva si scrive

$$y(x) = C e^{A(x)} = C e^{-x \sin x - \cos x} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Imponendo $y(\pi) = 3$ si ha $3 = C e$, ossia $C = 3e^{-1}$.

La soluzione del pbn. di Cauchy risulta essere quindi

$$\boxed{y(x) = 3 e^{-x \sin x - \cos x - 1}, \quad x \in \mathbb{R}}$$

b6) i) $f = o(h)$ per $x \rightarrow x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = 0.$ □

ii) Enunciare e dimostrare il Teorema di Torricelli-Barrow. ■