

Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
 CdL in Informatica - CdL in Ingegneria dell'Informazione e delle Comunicazioni
 CdL in Ingegneria dell'Informazione e Organizzazione d'Impresa
 ESAIE SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1
 a.a. 2015-2016 - Trento, 9 giugno 2016

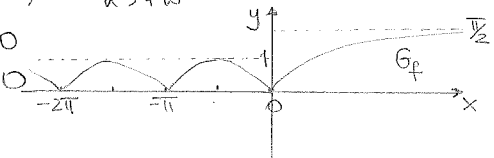
FILA (A)

21) $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n+1} : n \geq 1 \right\}$. Oss. che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, pari si ha $0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{3}$,
 mentre per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, dispari si ha $-\frac{1}{2} \leq \frac{-1}{n+1} < 0$. Quindi
 $\inf A = \min A = -\frac{1}{2}$, $\sup A = \max A = \frac{1}{3}$. □

22) $z = 2 + i$; $\operatorname{Re}(|z|^2 - 2z) = \operatorname{Re}(5 - 2(2+i)) = \operatorname{Re}(1-2i) = \underline{1}. □$

23) $a_n = \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)$: Notiamo che $\frac{1}{n+1}$ è decrescente su $\mathbb{N}$, $0 < \frac{1}{n+1} \leq 1$.
 Inoltre $\sin x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ è crescente. Quindi $\{a_n\}$ è decrescente su $\mathbb{N}$. □

24) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \log\left(1 + \frac{2}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{2}{n} + o\left(\frac{2}{n}\right) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 + o(1)) = \underline{2}. □$

25) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} |\sin x| & \text{se } x \leq 0 \\ \arctan x & \text{se } x > 0 \end{cases}$ 
 $\inf_{\mathbb{R}} f = \min_{\mathbb{R}} f = 0$, $\sup_{\mathbb{R}} f = \frac{\pi}{2}$. □

26) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} \alpha e^x - 2 & \text{se } x \leq 0 \\ 3 \sin x + \beta & \text{se } x > 0 \end{cases}$ f è continua in $\mathbb{R}$ se f risulta continua
 in $x=0$ (in tutti gli altri pti. è continua):

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\alpha e^x - 2) = \alpha - 2 = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3 \sin x + \beta) = \beta$
 $\Leftrightarrow \alpha - 2 = \beta$;

f è derivabile in $\mathbb{R}$ se f è derivabile in $x=0$ (in tutti gli altri punti è derivabile):

deve essere $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$, ossia $\lim_{x \rightarrow 0^-} (\alpha e^x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3 \cos x)$,

ossia $\alpha = 3$. In conclusione $\alpha = 3$, $\beta = 1$. □

27) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = -x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{1}. □$

28) $F(x) = \int_0^{2x} e^{t^2} \, dt$; $F'(x) = e^{(2x)^2} \cdot 2 = 2e^{4x^2}$; $F''(x) = 16xe^{4x^2}$. □

29) $\int_0^2 \frac{1}{x^\alpha (2-x)^{\frac{1}{2}-\alpha}} \, dx < +\infty \Leftrightarrow \alpha < 1$ e $\frac{1}{2} - \alpha < 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{-\frac{1}{2} < \alpha < 1}} □$

30) $y' + 3x = 0 \Leftrightarrow y' = -3x \Leftrightarrow \underline{\underline{y(x) = -\frac{3}{2}x^2 + C}}$, $C \in \mathbb{R}$. ■

b1) i) Osserviamo subito che $z \neq 0$, altrimenti $\frac{1}{z}$ non è definito.

Poniamo $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, $(x, y) \neq (0, 0)$.

Otteniamo

$$\begin{aligned} z\bar{z} + \frac{1}{z} &= x^2 + y^2 + \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} \\ &= x^2 + y^2 + \frac{x-iy}{x^2+y^2} = x^2 + y^2 + \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Risulta allora

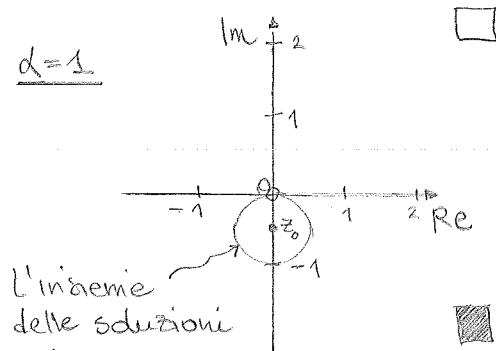
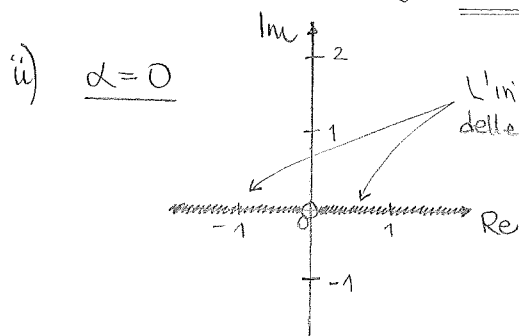
$$\operatorname{Im}\left(z\bar{z} + \frac{1}{z}\right) = \alpha \iff -\frac{y}{x^2+y^2} = \alpha \quad \text{con } (x, y) \neq (0, 0).$$

Segue allora che:

per $\alpha = 0$, l'insieme delle soluzioni dell'eq. data è formato dagli $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \operatorname{Im} z = 0$;

per $\alpha = 1$, l'insieme delle soluzioni dell'eq. data è formato dagli $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : x^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$, ossia $z = x + iy$

dagli $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |z - z_0| = \frac{1}{2}$, con $z_0 = -\frac{1}{2}i$.



b2) Ricordiamo che $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$ per $t \rightarrow 0$

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3) \text{ per } t \rightarrow 0.$$

Operando la sostituzione $t = x^2$, otteniamo

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6) \text{ per } x \rightarrow 0.$$

$$\text{Inoltre } (\sin x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Quindi

$$\frac{\sin x^2 - (\sin x)^2}{\log(1+x^\beta)} = \frac{\cancel{x^2} - \frac{x^6}{2} + o(x^6) - \cancel{x^2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^\beta + o(x^\beta)}$$

$$= \frac{\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^\beta + o(x^\beta)}$$

Allora

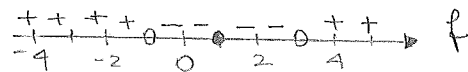
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x^2 - (\sin x)^2}{\log(1+x^\beta)} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < \beta < 4 \\ \frac{1}{3} & \text{se } \beta = 4 \\ +\infty & \text{se } \beta > 4. \end{cases}$$

b3)i) $f(x) = \frac{|x-1|}{x^2-2x-3}$

$$= \frac{|x-1|}{(x-3)(x+1)} = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-2x-3} & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{-x+1}{x^2-2x-3} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

• $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$

• non ci sono simmetrie evidenti



• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$y=0$ asint. orizzontale per f .
(per $x \rightarrow -\infty$
 $\rightarrow +\infty$)

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$

$x = -1$ asint. verticale per f .
(sia da destra che da sinistra)

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$

$x = 3$ asintoto verticale per f .
(sia da destra che da sinistra).

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$

• f è continua in tutti i pt. del suo dominio.

• $\text{dom } f' = \text{dom } f \setminus \{1\}$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x-3 - (x-1)(2x-2)}{(x^2-2x-3)^2} & \text{se } x > 1 \\ \frac{-(x^2-2x-3) - (-x+1)(2x-2)}{(x^2-2x-3)^2} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$x \neq 3$
 $x \neq -1$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-x^2+2x-5}{(x^2-2x-3)^2} & \text{se } x > 1 \\ & x \neq 3 \\ \frac{x^2-2x+5}{(x^2-2x-3)^2} & \text{se } x < 1 \\ & x \neq -1, \end{cases}$$

Poiché f è continua in $x=1$, si ha

$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \frac{1}{4}$, $f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = -\frac{1}{4}$; $x=1$ risulta essere un punto angoloso per f .

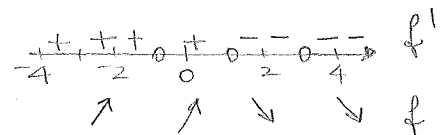
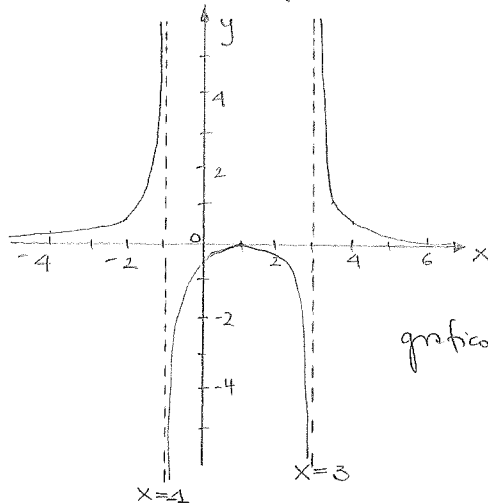
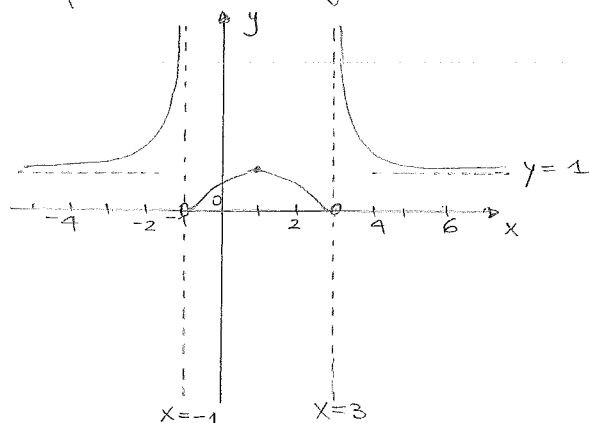


grafico qualitativo di f

$$\begin{aligned} \text{ii) } \int \frac{x-1}{x^2-2x-3} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-3} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \log|x-3| + \frac{1}{2} \log|x+1| + c. \end{aligned}$$

iii) Grafico qualitativo di $g(x) = e^{f(x)}$



b4) i) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)^n x^n$. Abbiamo una serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)^n x^n$.

Ovviamente $\sqrt[n]{(\sqrt[n]{2} - 1)^n} = \sqrt[n]{2} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ e quindi per il criterio della radice n -esima il raggio di convergenza

della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2}-1)^n x^n$ è $r=+\infty$.

Notiamo quindi che la serie converge su tutto $\mathbb{R}$, e scriviamo che l'insieme di convergenza è $E=\mathbb{R}$. $\square$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2}+1)^n x^n$.

Abbiamo una serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2}+1)^n x^n$.

Ovviamente $\sqrt[n]{\sqrt[n]{2}+1}^n = \sqrt[n]{2}+1 \rightarrow 2$ e quindi per il criterio della radice n -esima il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2}+1)^n x^n$ è $r=\frac{1}{2}$.

Notiamo che

se $x=\frac{1}{2}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2}+1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n$ non converge poiché non è soddisfatta la cond. nec. di convergenza, infatti

$$a_n = \frac{(\sqrt[n]{2}+1)^n}{2^n} = \left(\frac{\sqrt[n]{2}}{2} + \frac{1}{2}\right)^n = \left(1 + \left(\frac{\sqrt[n]{2}}{2} - \frac{1}{2}\right)\right)^n =$$

$$= e^{n \log\left(1 + \frac{\sqrt[n]{2}-1}{2}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{2} \log 2} = \sqrt{2},$$

perché $n \log\left(1 + \frac{\sqrt[n]{2}-1}{2}\right) = \underbrace{\frac{\log\left(1 + \frac{\sqrt[n]{2}-1}{2}\right)}{\frac{\sqrt[n]{2}-1}{2}}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt[n]{2}-1}{2}}_{\rightarrow \frac{1}{2} \log 2} \rightarrow \frac{1}{2} \log 2$

se $x=-\frac{1}{2}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2}+1)^n \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{2}+1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n$

che non converge, poiché non è convergente il termine generale della serie.

Quindi, l'insieme di convergenza è dato da $E=\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$. $\blacksquare$

65) $y' - \left(2 + \frac{1}{x}\right)y = 0 \Leftrightarrow y' = \left(2 + \frac{1}{x}\right)y$ eq. diff. lineare del 1° ordine a coeff. variabili

$$a(x) = \left(2 + \frac{1}{x}\right); \int 0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$b(x) \equiv 0; \int 0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^* \text{ (*)}$$

Sia $A(x)$ una primitiva di $a(x)$; allora l'integrale generale

(*) consideriamo l'intervallo $\int 0, +\infty[$ poiché il dato iniziale è assegnato in $x=1$.

dell'eq. diff. data risulta $y(x) = c e^{A(x)}$ al variare di $c \in \mathbb{R}$,
quindi $y(x) = c e^{2x + \log x}$ per $x > 0$. Possiamo anche scrivere
 $y(x) = c x e^{2x}$, $x > 0$.

Poniamo $y(1) = 1$ e otteniamo $1 = c e^2$, ossia $c = e^{-2}$.

Risultava che la soluzione del probl. di Cauchy dato è $y(x) = x e^{2x-2}$,
 $x > 0$. ■

b6) i) $f: A \rightarrow B$ una funzione. f si dice iniettiva se $\forall x_1, x_2 \in A$,
 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, oppure, equivalentemente, se $\forall x_1, x_2 \in A$,
 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. □

ii) Dimostrare che $\sqrt{2}$ è irrazionale. ■

FILA (B)

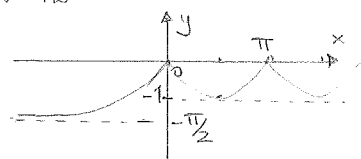
21) $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2+1} : n \geq 1 \right\}$. Oss. che per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, pari si ha $0 < \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{5}$,
mentre per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, dispari si ha $-\frac{1}{2} \leq \frac{-1}{n^2+1} < 0$. Quindi
 $\inf A = \min A = -\frac{1}{2}$, $\sup A = \max A = \frac{1}{5}$. $\square$

22) $z = 2+i$; $\operatorname{Im}(z+i|z|^2) = \operatorname{Im}(2+i+i^2 5) = \operatorname{Im}(2+6i) = \underline{6}$. $\square$

23) $a_n = \cos\left(\frac{1}{n+1}\right)$: Notiamo che $\frac{1}{n+1}$ è decrescente in $\mathbb{N}$, $0 < \frac{1}{n+1} \leq 1$.
Inoltre $\cos x: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ è decrescente. Quindi $\{a_n\}$ è crescente in $\mathbb{N}$. $\square$

24) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \log\left(1 - \frac{3}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(-\frac{3}{n} + o\left(\frac{3}{n}\right)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-3 + o(1)) = \underline{-3}$. $\square$

25) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \arctan x & \text{se } x \leq 0 \\ -|\sin x| & \text{se } x > 0 \end{cases}$



$\inf_{\mathbb{R}} f = -\frac{\pi}{2}$, $\sup_{\mathbb{R}} f = \max_{\mathbb{R}} f = 0$. $\square$

26) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin x + \alpha & \text{se } x \leq 0 \\ \beta e^{-x} + 4 & \text{se } x > 0 \end{cases}$. f è continua in $\mathbb{R}$ se f risulta continua in $x=0$ (in tutti gli altri pt. è continua):

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\sin x + \alpha) = \alpha = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\beta e^{-x} + 4) = \beta + 4$

$\Leftrightarrow \alpha = \beta + 4$;

f è derivabile in $\mathbb{R}$ se f è derivabile in $x=0$ (in tutti gli altri punti è derivabile):

deve essere $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$, ossia $\lim_{x \rightarrow 0^-} (\cos x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\beta e^{-x})$,

ossia $1 = -\beta$. In conclusione, $\alpha = 3$, $\beta = -1$. $\square$

27) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} + \left[\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\frac{\pi}{2} - 1}$. $\square$

28) $F(x) = \int_0^{3x} e^{t^2} \, dt$; $F'(x) = e^{(3x)^2} \cdot 3 = 3e^{9x^2}$; $F''(x) = 18 \cdot 3x e^{9x^2}$. $\square$

29) $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha (1-x)^{\frac{3}{2}-\alpha}} \, dx < +\infty \Leftrightarrow \alpha < 1 \text{ e } \frac{3}{2}-\alpha < 1 \Leftrightarrow \underline{\frac{1}{2} < \alpha < 1}$. $\square$

210) $y' - 5x = 0 \Leftrightarrow y' = 5x \Leftrightarrow \underline{y(x) = \frac{5x^2}{2} + c}$, $c \in \mathbb{R}$. $\blacksquare$

b1) Osserviamo subito che $z \neq 0$, altrimenti $\frac{1}{z}$ non è definito.

Poniamo $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, $(x, y) \neq (0, 0)$.

Otteniamo

$$\begin{aligned} z\bar{z} - \frac{i}{z} &= x^2 + y^2 - \frac{i}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} \\ &= x^2 + y^2 + \frac{-y - ix}{x^2 + y^2} = x^2 + y^2 - \frac{y}{x^2 + y^2} - i \frac{x}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Risulta allora

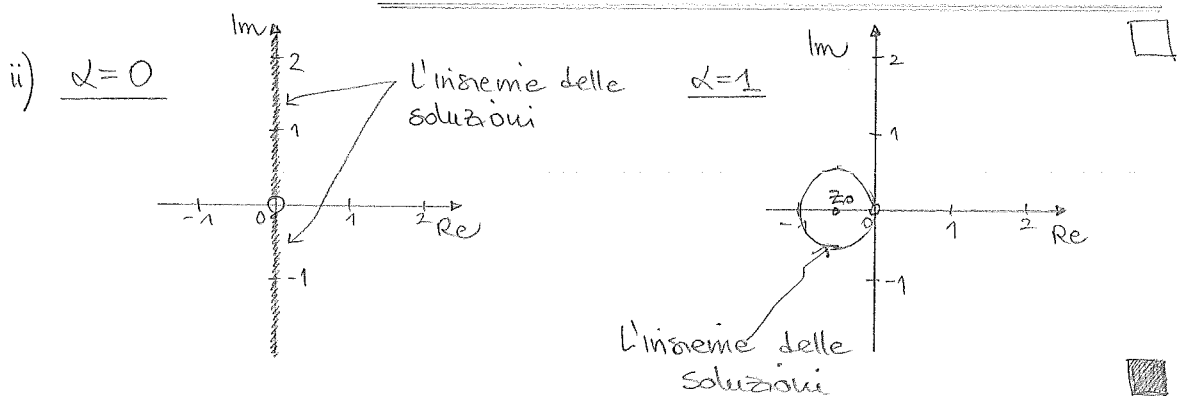
$$\operatorname{Im}\left(z\bar{z} - \frac{i}{z}\right) = \alpha \iff \frac{-x}{x^2 + y^2} = \alpha \quad \text{con } (x, y) \neq (0, 0).$$

Segue allora che:

per $\alpha = 0$, l'insieme delle soluzioni dell'eq. data è formato dagli $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \operatorname{Re} z = 0$;

per $\alpha = 1$, l'insieme delle soluzioni dell'eq. data è formato dagli $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : (x + \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, con $z = x + iy$

dagli $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |z - z_0| = \frac{1}{2}$, con $z_0 = -\frac{1}{2}$.



b2) Ricordiamo che $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$ per $t \rightarrow 0$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4) \quad \text{per } t \rightarrow 0.$$

Operando la sostituzione $t = x^2$, otteniamo

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + o(x^6) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

$$\text{Inoltre } (\sin x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Quindi

$$\frac{1 - \cos x^\beta}{(\sin x)^2 - \sin x^2} = \frac{\cancel{x^{\frac{2\beta}{2}}} + o(x^\beta)}{\cancel{x^2} - \frac{\cancel{x^4}}{3} + o(x^4) - \cancel{x^2} + o(x^4)} = \frac{\cancel{x^{\frac{2\beta}{2}}} + o(x^\beta)}{-\frac{\cancel{x^4}}{3} + o(x^4)}$$

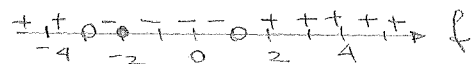
Allora allora

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x^\beta}{(\sin x)^2 - \sin x^2} = \begin{cases} -\infty & \text{se } 0 < \beta < 2 \\ -\frac{3}{2} & \text{se } \beta = 2 \\ 0 & \text{se } \beta > 2. \end{cases}$$

b3) i)
$$f(x) = \frac{|x+2|}{x^2+2x-3} = \frac{|x+2|}{(x+3)(x-1)} = \begin{cases} \frac{x+2}{x^2+2x-3} & \text{se } x \geq -2, x \neq 1 \\ \frac{-x-2}{x^2+2x-3} & \text{se } x < -2, x \neq -3. \end{cases}$$

• $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$

• non ci sono simmetrie evidenti



• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$y=0$ asintoto orizzontale per f .
(per $x \rightarrow -\infty \rightarrow +\infty$)

$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty$

$x = -3$ asintoto verticale per f
(sia da destra che da sinistra).

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

$x = 1$ asintoto verticale per f
(ora da destra che da sinistra).

• f è continua in tutti i pt. del suo dominio.

• $\text{dom } f' = \text{dom } f \setminus \{-2\}$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-3 - (x+2)(2x+2)}{(x^2+2x-3)^2} & \text{se } x > -2, x \neq 1 \\ \frac{-(x^2+2x-3) + (x+2)(2x+2)}{(x^2+2x-3)^2} & \text{se } x < -2, x \neq -3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{-x^2-4x-7}{(x^2+2x-3)^2} & \text{se } x > -2, x \neq 1 \\ \frac{x^2+4x+7}{(x^2+2x-3)^2} & \text{se } x < -2, x \neq -3 \end{cases}$$

Poiché f è continua in $x = -2$, si ha

$f'_-(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f'(x) = \frac{1}{3}$, $f'_+(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f'(x) = -\frac{1}{3}$; $x = -2$ risulta essere un punto angoloso per f .

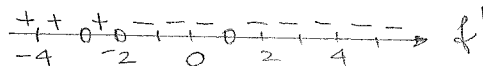
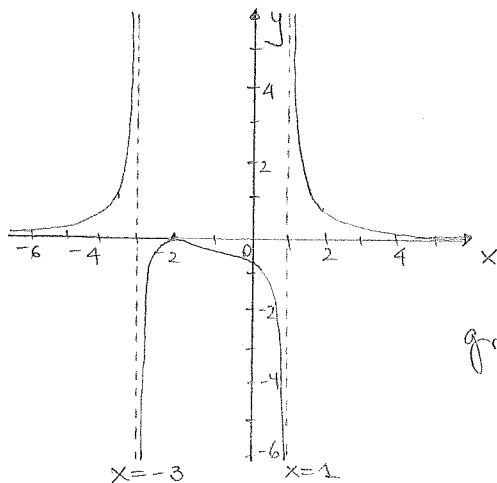


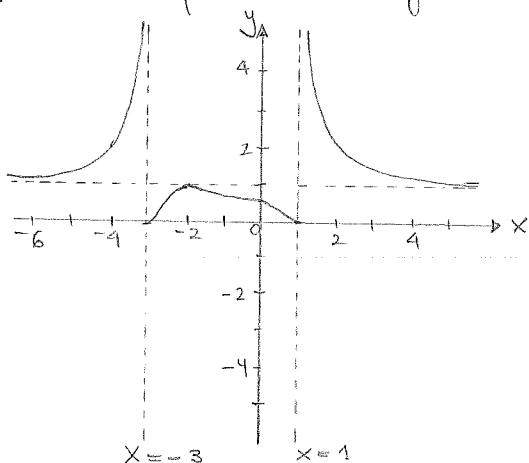
grafico qualitativo di f

□

$$\begin{aligned} \text{ii) } \int \frac{x+2}{x^2+2x-3} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+3} dx + \frac{3}{4} \int \frac{1}{x-1} dx \\ &= \frac{1}{4} \log|x+3| + \frac{3}{4} \log|x-1| + c. \end{aligned}$$

□

iii) Grafico qualitativo di $g(x) = e^{f(x)}$.



■

b4) i) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{3}-1)^n x^n$. Abbiamo

La serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{3}-1)^n x^n$ a_n

Ovviamente $\sqrt[n]{3}-1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ e quindi per il criterio della radice n -esima il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{3}-1)^n x^n$ è $\underline{r = +\infty}$.

Notiamo quindi che la serie converge su tutto $\mathbb{R}$, e quindi

scriviamo che l'insieme di convergenza è $E = \mathbb{R}$. □

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{3} + 1)^n x^n$

Abbiamo una

serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{3} + 1)^n x^n$

Ovviamente $\sqrt[n]{(\sqrt[n]{3} + 1)^n} = \sqrt[n]{3} + 1 \rightarrow 2$ e quindi per il criterio della radice n-esima il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{3} + 1)^n x^n$ è $\underline{\underline{r = \frac{1}{2}}}$.

Notiamo che

se $x = \frac{1}{2}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{3} + 1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n$ non converge poiché non è

soddisfatta la cond. nec. di convergenza. Infatti

$$a_n = \frac{(\sqrt[n]{3} + 1)^n}{2^n} = \left(\frac{\sqrt[n]{3} + 1}{2} \right)^n = \left(1 + \left(\frac{\sqrt[n]{3} - 1}{2} \right) \right)^n = e^{n \log \left(1 + \frac{\sqrt[n]{3} - 1}{2} \right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{2} \log 3} = \sqrt{3}$$

poiché $n \log \left(1 + \frac{\sqrt[n]{3} - 1}{2} \right) = \frac{\log \left(1 + \frac{\sqrt[n]{3} - 1}{2} \right)}{\frac{\sqrt[n]{3} - 1}{2}} \cdot \frac{\sqrt[n]{3} - 1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

se $x = -\frac{1}{2}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{3} + 1)^n \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{3} + 1)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

che non converge, poiché non è convergente il termine generale della serie.

Quindi, l'insieme di convergenza della serie è dato da

$\underline{\underline{E =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[}}$ ■

b5) $y' - \left(1 - \frac{1}{x}\right)y = 0 \Leftrightarrow y' = \left(1 - \frac{1}{x}\right)y$

eq. diff. lineare del 1° ordine
a coeff. variabili
 $a(x) \equiv 1 - \frac{1}{x} :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continua
 $b(x) \equiv 0$

(consideriamo l'intervallo $]0, +\infty[$ poiché il dato iniziale è assegnato in $x=1$).

Sia $A(x)$ una primitiva di $a(x)$; allora l'integrale generale

dell'eq. diff. data risulta $y(x) = c e^{A(x)}$ al variare di $c \in \mathbb{R}$,
quindi $y(x) = c e^{x - \log x}$ per $x > 0$. Possiamo anche scrivere
 $y(x) = \frac{c}{x} e^x$, $x > 0$.

Poniamo $y(1) = 1$ e otteniamo $1 = c e$, ossia $c = e^{-1}$.

Risulta che la soluzione del prob. di Cauchy dato è $y(x) = \frac{e^{x-1}}{x}$,
 $x > 0$.

b6) i) $f: A \rightarrow B$ una funzione. f si dice suriettiva se $f(A) = B$. ■

ii) Enunciate e dimostrate la formula del prodotto di due numeri complessi
in forma trigonometrica. □
■