

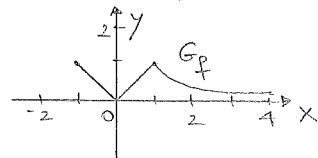
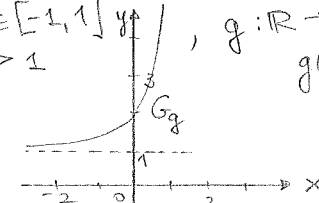
Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
 CdL in Informatica - CdL in Ingegneria dell'Informazione e delle Comunicazioni
 CdL in Ingegneria dell'Informazione e Organizzazione d'Impresa
 ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1
 a.a. 2015-2016 - Trento, 7 settembre 2016

FILA (A)

21) $f(x) = \sqrt{4x^2 - ax + 1}$ ha dom $f = \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow 4x^2 - ax + 1 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow a^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow a \in [-4, 4]$. □

22) $z = 1 + i$; $\frac{z + \bar{z}}{2i} = \frac{1+i + 1-i}{2i} = \frac{2}{2i} = \frac{1}{i} = -i$. □

23) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x + x^3|$ non è iniettiva; basta osservare che f è pari, o semplicemente (per esempio), $f(-1) = f(1)$. □

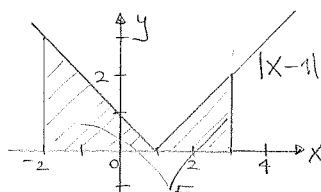
24) $f: [-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \in [-1, 1] \\ x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^x + 1$
 
 Perché $g(\mathbb{R}) =]1, +\infty[$, allora $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{(e^x + 1)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$. □

25) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{n} + 1} = \frac{1}{2}$. □

26) $f(x) = x^4 - x^2$; $f'(x) = 4x^3 - 2x$; $f''(x) = 12x^2 - 2 = 2(6x^2 - 1)$.

1 pt. di flesso sono $x_{1/2} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$.

27) $\int_{-2}^3 |x-1| dx = \text{area } E = \frac{13}{2}$. □



28) Ricordiamo che $f(x) < 0$ su $[0, 3]$ $\Rightarrow F(x)$ decrescente su $[0, 3]$

(questo fatto segue facilmente dalla definizione di funzione integrale e l'interpretazione geometrica dell'integrale, oppure dal TFC, ossia $F'(x) = f(x)$ su $[0, 3]$).

Quindi $x=0$ pt. di massimo per F e $x=3$ pt. di minimo per F . □

29) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(1+\sqrt{n})}$ è divergente poiché $\frac{1}{\sqrt{n}(1+\sqrt{n})} \sim \frac{1}{n}$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ è divergente. □

30) $y'' = 0$ su $\mathbb{R} \Leftrightarrow y'(x) = c_1$, $c_1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y(x) = c_1 x + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

b1) $A = \{ a_n = 1 + \frac{\sin \alpha}{n} : n \geq 1 \}$, $\alpha \in [0, 2\pi[$.

Notiamo che $\forall \alpha \in [0, 2\pi[$, $\forall n \geq 1$, $|a_n| \leq 1 + \frac{1}{n} \leq 2$ e quindi A è un insieme limitato.

Se $\alpha = 0, \pi$, allora $A = \{1\}$, e $\inf A = \min A = \sup A = \max A = 1$.

Se $0 < \alpha < \pi$, $\frac{\sin \alpha}{n} > 0 \forall n \geq 1$; inoltre $\frac{\sin \alpha}{n} \downarrow 0$ e quindi $a_n \downarrow 1$. Risulta

$$\underline{\inf A = 1}, \quad \underline{\sup A = \max A = a_1 = 1 + \sin \alpha}.$$

Se $\pi < \alpha < 2\pi$, $\frac{\sin \alpha}{n} < 0 \forall n \geq 1$; inoltre $\frac{\sin \alpha}{n} \uparrow 0$ e quindi $a_n \uparrow 1$. Risulta

$$\underline{\inf A = \min A = a_1 = 1 + \sin \alpha} \quad \text{e} \quad \underline{\sup A = 1}.$$

b2) $f(x) = e^{-x \cos x} - 1 + \log(1+x)$. Ricordiamo che

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + o(t^3) \quad \text{per } t \rightarrow 0,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0,$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Poiché $-x \cos x = -x \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) = -x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{4!} + o(x^5)$,
per $x \rightarrow 0$, ne segue (usando il calcolo degli $o(\cdot)$)

$$\begin{aligned} e^{-x \cos x} &= 1 + \left(-x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{4!} + o(x^5)\right) + \frac{1}{2} \left(-x + \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(-x + \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right)^3 \\ &= 1 - x + \frac{x^3}{2} + o(x^3) + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} + o(x^4) - \frac{1}{3!} x^3 + o(x^3) \\ &= 1 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Quindi } f(x) &= 1 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - 1 + \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \\ &= \frac{2}{3} x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Risulta che l'ordine di infinitesimo di f è $n=3$, e la parte principale $\frac{2}{3} x^3$.

b3) i) $f(x) = e^{|1-x^3|}$

• $\text{dom } f = \mathbb{R}$

• nessuna simmetria evidente

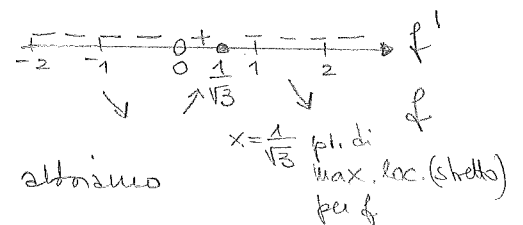
• segno di f ; sempre positiva.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; $y=0$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow +\infty$.

• f è continua su $\mathbb{R}$;

• $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $f(x) = \begin{cases} e^{x-x^3} & \text{se } x \geq 0 \\ e^{-x-x^3} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} (1-3x^2)e^{x-x^3} & \text{se } x > 0 \\ -(1-3x^2)e^{-x-x^3} & \text{se } x < 0 \end{cases}$



$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ è l'unico pt. critico per f .

Inoltre, essendo f continua in $x=0$, abbiamo

$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -1$, $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1$.

Quindi $x=0$ è un pt. angoloso per f .

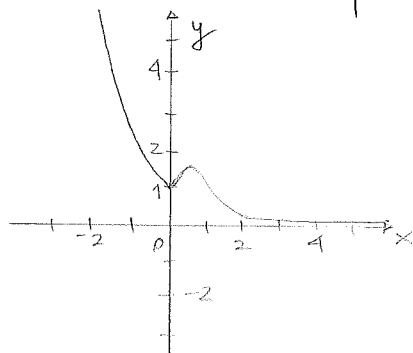


grafico qualitativo di f .



ii) $g(x) = \arctan f(x)$

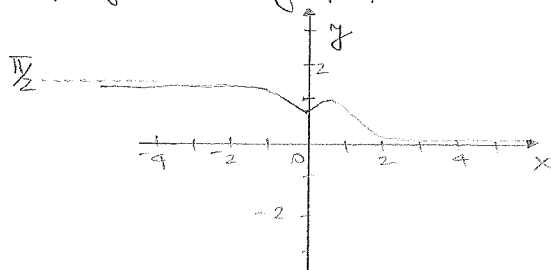


grafico qualitativo di g .

$\inf_{\mathbb{R}} g = \underline{0}$, $\sup_{\mathbb{R}} g = \underline{\frac{\pi}{2}}$



b4) i) $\sum_{n=0}^{\infty} g^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (gx^2)^n$ è una serie geometrica che converge

$\Leftrightarrow |gx^2| < 1 \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{g}$, ossia $E =]-\frac{1}{\sqrt{g}}, \frac{1}{\sqrt{g}}[$.

(nota: si giunge rapidamente alla stessa conclusione se si

considera la serie data come serie di potenze...).

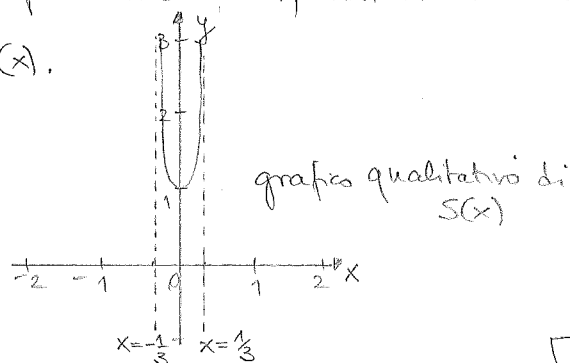
□

ii) $S(x) = \frac{1}{1-9x^2} \quad \forall x \in E : \bullet S(x) > 0 \quad \forall x \in E ; \text{ è pari,}$

$\bullet \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}^+} S(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^-} S(x) = +\infty.$

Inoltre $S'(x) = \frac{18x}{(1-9x^2)^2}$ su E .

Risulta che $x=0$ è un pt. critico di $S(x)$, anzi $x=0$ è un pt. di min. loc. (stretto) per $S(x)$.



□

iii) $\int_0^{\frac{1}{3}} [S(x)]^{2\alpha} dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{(1-3x)^{2\alpha}(1+3x)^{2\alpha}} dx.$

Risulta che $S(x) \sim \frac{1}{2(1-3x)}$ per $x \rightarrow \frac{1}{3}^-$, e quindi

$\int_0^{\frac{1}{3}} [S(x)]^{2\alpha} dx < +\infty \iff 2\alpha < 1, \text{ ossia } \underline{\underline{\alpha < \frac{1}{2}}}.$

■

b5) $y' = -(\sin x)y + 2\sin x$ è un'eq. diff. lineare del 1° ordine

con $a(x) = -\sin x$, $b(x) = 2\sin x$ definite su $\mathbb{R}$, continue.

Se $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$, allora la formula risolutiva per l'eq. diff. data può essere scritta come

$y(x) = e^{A(x)} \left(c + 2 \int \sin x e^{-A(x)} dx \right), \quad c \in \mathbb{R}$

e quindi $y(x) = e^{\cos x} (c + 2 e^{-\cos x})$, ossia $y(x) = 2 + c e^{\cos x}$.

Imponendo $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ si ricava $0 = 2 + c$, ossia $c = -2$.

La soluzione del problema di Cauchy risulta quindi

$y(x) = 2(1 - e^{\cos x})$, $x \in \mathbb{R}$.

■

b6) i) Sia $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Allora f si dice derivabile in
 $x_0 \in]a, b[$ se esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (oppure, analogamente,

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$) ed è finito. □

ii) Scrivete l'enunciato e la dimostrazione del Teorema del
valor medio o di Lagrange. ■

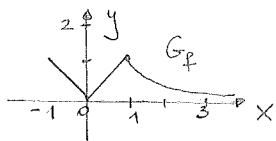
FILA (B)

21) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + a^2}$ ha $\text{dom } f = \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 2x + a^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
 $4 - 4a^2 \leq 0 \Leftrightarrow \underline{a \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[}$. □

22) $z = 2 - i$; $\frac{z + \bar{z}}{2i} = \frac{2 - i + 2 + i}{2i} = \frac{4}{2i} = \frac{2}{i} \cdot \frac{i}{i} = \underline{-2i}$. □

23) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x + x^3$ è iniettiva, poiché f è strettamente crescente su $\mathbb{R}$. □

24) $f: [-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = \sin x$



Poiché $g(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ si ha

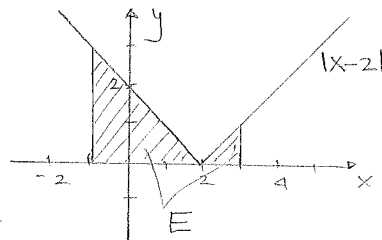
$(f \circ g)(x) \doteq f(g(x)) = \underline{|\sin x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}$. □

25) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt[n]{3}}{\sqrt[n]{n} - 3} = \frac{2}{1-3} = \underline{-1}$. □

26) $f(x) = x^2 - x^4$; $f'(x) = 2x - 4x^3$; $f''(x) = 2 - 12x^2 = 2(1 - 6x^2)$.

I pt. di flesso sono $x_{\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$. □

27) $\int_{-1}^3 |x-2| dx = \text{area } E = \underline{5}$.



28) Dal teorema fondamentale del calcolo segue $F''(x) = f'(x)$ su $[0, 3]$.

Poiché $f'(x) < 0$ su $[0, 3]$, si ha che $F''(x) < 0$ su $[0, 3]$ e quindi

$F(x)$ è strett. concava su $[0, 3]$. □

29) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(1+n)}$ è convergente poiché $\frac{1}{\sqrt{n}(1+n)} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$ per $n \rightarrow +\infty$, e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ è convergente. □

210) $y'' = 2$ su $\mathbb{R} \Leftrightarrow y'(x) = 2x + c_1, c_1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \underline{y(x) = x^2 + c_1 x + c_2},$
 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

b1) $A = \{a_n = 1 + \frac{\cos d}{n} : n \geq 1\}$, $d \in [0, 2\pi[$.

Notiamo che $\forall d \in [0, 2\pi[$, $\forall n \geq 1$, $|a_n| \leq 1 + \frac{1}{n} \leq 2$ e quindi A è un insieme limitato.

Se $d = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, allora $A = \{1\}$, e $\inf A = \min A = \sup A = \max A = 1$.

Se $0 < d < \frac{\pi}{2}$ o $\frac{3\pi}{2} < d < 2\pi$, $\frac{\cos d}{n} > 0 \forall n \geq 1$; inoltre $\frac{\cos d}{n} \downarrow 0$ e quindi $a_n \downarrow 1$. Risulta

$\inf A = 1$, $\sup A = \max A = a_1 = 1 + \cos d$.

Se $\frac{\pi}{2} < d < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{\cos d}{n} < 0 \forall n \geq 1$; inoltre $\frac{\cos d}{n} \nearrow 0$ e quindi $a_n \nearrow 1$. Risulta

$\inf A = \min A = a_1 = 1 + \cos d$ e $\sup A = 1$. 

b2) $f(x) = e^{x \cos x} - 1 + \log(1-x)$. Ricordiamo che

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + o(t^3) \quad \text{per } t \rightarrow 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3) \quad \text{per } t \rightarrow 0.$$

Poiché $x \cos x = x(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{4!} + o(x^5)$, per $x \rightarrow 0$,
ne segue (usando il calcolo degli o.i.)

$$\begin{aligned} e^{x \cos x} &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{4!} + o(x^5)\right) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(x - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right)^3 \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{2} + o(x^3) + \frac{1}{2} x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) + \frac{1}{3!} x^3 + o(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3} x^3 + o(x^3); \end{aligned}$$

inoltre $\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. Quindi

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\ &= -\frac{2}{3} x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Risulta che l'ordine di infinitesimo di f è $n=3$, e la parte principale $-\frac{2}{3} x^3$. 

b3) i)

$$f(x) = e^{-|x|+x^3}$$

• $\text{dom } f = \mathbb{R}$

• nessuna simmetria evidente

• segno di f ; sempre positiva,

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $y=0$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$.

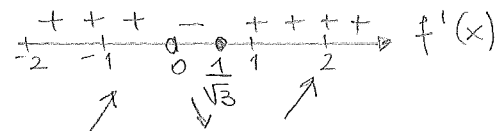
• f continua su $\mathbb{R}$;

• $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x+x^3} & \text{se } x \geq 0 \\ e^{x+x^3} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} (-1+3x^2)e^{-x+x^3} & \text{se } x > 0 \\ (1+3x^2)e^{x+x^3} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ è l'unico pt. critico per f .



Inoltre, essendo f continua in

$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ pt. di min. loc. (stretto) per f

$x=0$, abbiamo

$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 1$, $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -1$.

Quindi $x=0$ è un pt. angoloso per f .

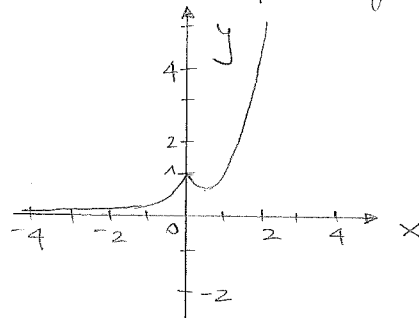


grafico qualitativo di f .



ii) $g(x) = \arctan f(x)$

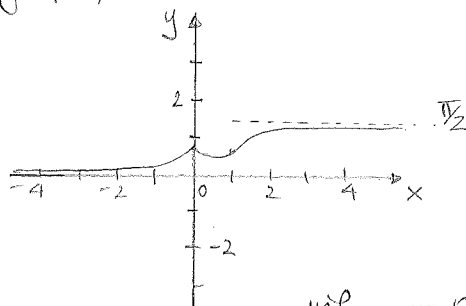


grafico qualitativo di g .

$\inf_{\mathbb{R}} g = \underline{\underline{0}}$, $\sup_{\mathbb{R}} g = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$.



b4) i) $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (4x^2)^n$ è una serie geometrica che converge $\Leftrightarrow$
 $|4x^2| < 1 \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{4}$, ossia $\underline{E =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[}$.

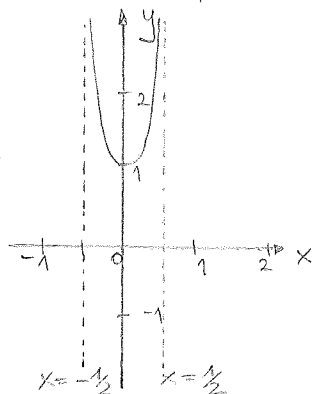
(nota: si giunge rapidamente alla stessa conclusione se si considera la serie data come serie di potenze...).

ii) $S(x) = \frac{1}{1-4x^2} \quad \forall x \in E$:
 • $S(x) > 0 \quad \forall x \in E$; è pari,
 • $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} S(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} S(x) = +\infty$.

Inoltre $S'(x) = \frac{8x}{(1-4x^2)^2}$ su E .

Risulta che $x=0$ è un pt. critico di $S(x)$, anzi $x=0$ è un pt. di minimo loc (stretto) per $S(x)$.

grafico qualitativo di $S(x)$



iii) $\int_0^{\frac{1}{2}} [S(x)]^{3d} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-2x)^{3d}(1+2x)^{3d}} dx$.

Risulta che $S(x) \sim \frac{1}{2(1-2x)}$ per $x \rightarrow \frac{1}{2}^-$, e quindi

$\int_0^{\frac{1}{2}} [S(x)]^{3d} dx < +\infty \Leftrightarrow 3d < 1$, ossia $\underline{\underline{d < \frac{1}{3}}}$.

b5) $y' = (\cos x)y + 3\cos x$ è un'eq. diff. lineare del 1° ordine
 con $a(x) = \cos x$, $b(x) = 3\cos x$ definite su $\mathbb{R}$,
 continue.

Se $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$, allora la formula risolutiva per l'eq. diff. data può essere scritta come

$y(x) = e^{A(x)} \left(c + 3 \int \cos x e^{-A(x)} dx \right), c \in \mathbb{R}$

e quindi $y(x) = e^{\sin x} (c - 3e^{-\sin x})$, ossia $y(x) = -3 + ce^{\sin x}$.

Imponendo $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ si ottiene $1 = -3 + ce$, ossia $c = \frac{4}{e}$.

La soluzione del problema di Cauchy risulta quindi

$$\underline{y(x) = -3 + 4e^{\sin x - 1}, x \in \mathbb{R}.}$$



b6) i) Sia $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Allora f si dice continua in

$x_0 \in]a, b[$ se esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

(oppure, analog., $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in]a, b[: |x - x_0| < \delta$
 $\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$).



ii) Scrivete l'enunciato e la dimostrazione del Teorema di Fermat.

