

1) i) $A = \left\{ x_n = \frac{n^2 + 3n + 2}{n^2}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$

Osserviamo che $x_n = 1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, e che

$$1 < x_n \leq 1 + 3 + 2 = 6 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Quindi:

A è limitato $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a) A \text{ è limitato superiormente da } 6 \text{ (ogni } M \geq 6 \text{ è un} \\ \text{maggiorante di } A). \text{ In particolare, poiché } 6 \text{ è un} \\ \text{maggiorante di } A \text{ e } 6 \in A, \text{ abbiamo } \underline{6 = \max A = \sup A.} \\ b) A \text{ è limitato inferiormente da } 1 \text{ (ogni } m \leq 1 \text{ è un} \\ \text{minorente di } A). \text{ Dimostriamo che } \underline{1 = \inf A} \text{ è il più grande} \\ \text{dei minorenti.} \end{cases}$

Sia $\varepsilon > 0$ fissato arbitrariamente; proviamo che $1 + \varepsilon$ non può essere minorenza. Infatti:

$$x_n < 1 + \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} < 1 + \varepsilon.$$

Ora $\frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} < \frac{3}{n} + \frac{2}{n} = \frac{5}{n}$. Dalla proprietà archimedeica si deduce che esiste $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ (che ovviamente dipende da ε) tale che $\frac{5}{n} < \varepsilon$ e quindi per tale n si ha anche $x_n < 1 + \varepsilon$; di conseguenza $1 + \varepsilon$ non può essere minorenza.

In conclusione, $\underline{\inf A = 1}$, ma non è minimo, in quanto $1 \notin A$ essendo $1 \neq 1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

ii) $A = \left\{ x_n = \frac{3n-2}{n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$

Osserviamo che $x_n = 3 - \frac{2}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ e che

$$1 \leq x_n < 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Quindi :

- A è limitato $\Rightarrow$
- a) A è limitato inferiormente da 1 (ogni $m \leq 1$ è un minorante di A). In particolare, poiché 1 è un minorante di A e $1 \in A$, abbiamo $1 = \min A = \inf A$.
 - b) A è limitato superiormente da 3 (ogni $M \geq 3$ è un maggiorante di A). Dimostriamo che $\lambda = 3$ è il più piccolo dei maggioranti. Sia $\varepsilon > 0$ fissato arbitrariamente; proviamo che $3 - \varepsilon$ non è più un maggiorante di A . Infatti :

$$\begin{aligned} 3 - \varepsilon < x_n &\Leftrightarrow \cancel{3} - \varepsilon < \cancel{3} - \frac{2}{n} \\ &\Leftrightarrow \varepsilon > \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Dalla proprietà archimedeica si deduce che $\exists n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ tale che $\varepsilon > \frac{2}{n}$ e quindi per tale n si ha anche $3 - \varepsilon < x_n$; di conseguenza $3 - \varepsilon$ non può essere maggiorante di A .

In conclusione, $\sup A = 3$, ma non è massimo, in quanto $3 \notin A$ essendo $3 \neq 3 - \frac{2}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. $\square$

iii) $A = \{x_n = n^2 - 2n - 3, n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$

Anon è limitato!

Osserviamo che $x_n = n^2 - 2n - 3 = (n-1)^2 - 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ e che

$$-4 \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

Quindi :

- a) A è limitato inferiormente da -4 (ogni $m \leq -4$ è un minorante di A). In particolare, poiché -4 è un minorante di A e $-4 \in A$ (per $n=1$), abbiamo $-4 = \min A = \inf A$.

b) A non è limitato superiormente, e quindi $\sup A = +\infty$.
 Infatti, fissato arbitrariamente $M > 0$ (non è restrittivo restringersi a M positivo!) esiste $x_n \in A : x_n > M$,
 ossia $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ tale che $(n-1)^2 - 4 > M$.
 Basta prendere $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ per cui $n-1 > \sqrt{4+M}$,
 ossia $n > 1 + \sqrt{4+M}$ e tale n esiste sempre per
 la proprietà archimedeica. Quindi nessun $M > 0$ è
 un maggiorante di A e l'insieme A non è limitato sup.

iv) $A = \left\{ x_n = (-1)^n \frac{3n-1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$.

A è limitato;
 segue da
 a) e b)

Osserviamo che $x_n = (-1)^n \left(3 - \frac{1}{n} \right)$ e
 da cui si deduce

$$x_n = \begin{cases} 3 - \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ pari} \\ -3 + \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$-3 \leq x_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Quindi:

a) A è limitato inferiormente da -3 (ogni $m \leq -3$ è un
 minorante di A). Dimostriamo che $\lambda = -3$ è il più grande
dei minoranti.

Sia $\varepsilon > 0$ fissato arbitrariamente; proviamo che $-3 + \varepsilon$ non può
 essere minorante, ossia che $\exists n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ tale che $x_n < -3 + \varepsilon$.

Supponiamo che n sia dispari, ossia $n = 2k+1$. Allora

$$\begin{aligned} x_n < -3 + \varepsilon &\Leftrightarrow x_{2k+1} < -3 + \varepsilon \Leftrightarrow -3 + \frac{1}{2k+1} < -3 + \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2k+1} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ora $\frac{1}{2k+1} < \frac{1}{2k}$. Dalla proprietà archimedeica si deduce che
 $\exists k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ t.c. $\frac{1}{2k} < \varepsilon$, e quindi per tale k si ha
 anche $x_{2k+1} < -3 + \varepsilon$; di conseguenza, $-3 + \varepsilon$ non può
 essere minorante. In conclusione, $\inf A = -3$, ma non è

minimo, in quanto $-3 \notin A$, essendo $-3 \neq -3 + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, dispari.

b) A è limitata superiormente da 3 (ogni $M \geq 3$ è un maggiorante di A). Analogamente alla dim. in a), considerando n pari, si prova che $\sup A = 3$. $\square$

$$v) \boxed{A = \left\{ x_n : (-1)^n \frac{3n+1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}}.$$

Osserviamo che $x_n = (-1)^n \left(3 + \frac{1}{n} \right)$ e $x_n = \begin{cases} 3 + \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ pari} \\ -3 - \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$.

Ne segue

$$-4 \leq x_n \leq 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Quindi:

$\swarrow$
 A è limitato $\left\{ \begin{array}{l} a) A \text{ è limitato inferiormente da } -4 \text{ (ogni } m \leq -4 \text{ è un} \\ \text{minorante di } A). \text{ In particolare, } -4 \text{ è un minorante di} \\ A \text{ e } -4 \in A \text{ (se } n=1!), \text{ e quindi } \underline{-4 = \min A = \inf A.} \\ b) A \text{ è limitato superiormente da } \frac{7}{2} \text{ (ogni } M \geq \frac{7}{2} \text{ è un} \\ \text{maggiorante di } A). \text{ In particolare, } \frac{7}{2} \text{ è un maggiorante} \\ \text{di } A \text{ e } \frac{7}{2} \in A \text{ (se } n=2), \text{ e quindi } \underline{\frac{7}{2} = \max A = \sup A.} \end{array} \right.$

$$vi) \boxed{A = \{ x \in \mathbb{R} : -6x^2 - |x| + 1 > 0 \}} \quad \square$$

$$\text{Abbiamo } -6x^2 - |x| + 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ -6x^2 - x + 1 > 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x < 0 \\ -6x^2 + x + 1 > 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ora } -6x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{matrix}; \quad -6x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \begin{matrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \end{matrix};$$

Quindi

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3} \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x < 0 \\ -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2} \end{cases};$$

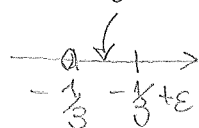
Ne segue $A =]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$. Quindi:

a) A è limitato inferiormente e $\inf A = -\frac{1}{3}$.

(• $\forall x \in A, -\frac{1}{3} \leq x$;

• $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x < -\frac{1}{3} + \varepsilon$; infatti

$A \ni -\frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{2}$



fissato $\varepsilon > 0$ arbitrariamente, basta

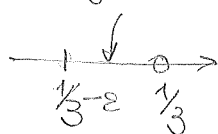
prendere $x = -\frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{2}$ (per esempio).

b) A è limitato superiormente e $\sup A = \frac{1}{3}$.

(• $\forall x \in A, x \leq \frac{1}{3}$;

• $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : \frac{1}{3} - \varepsilon < x$; infatti

$A \ni \frac{1}{3} - \frac{\varepsilon}{2}$



fissato $\varepsilon > 0$ arbitrariamente, basta

prendere $x = \frac{1}{3} - \frac{\varepsilon}{2}$ (per esempio).

□

vii) $A = \left\{ x_n = (1 - \cos n\pi) \frac{1}{n} , n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$

Osserviamo che

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ 2n + \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Procedendo come negli esercizi precedenti si prova subito:

a) A è limitato inferiormente e $\inf A = 0$;

b) A non è limitato superiormente e $\sup A = +\infty$. □

viii) $A = \left\{ x_n = \cos \frac{n\pi}{6} , n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$

Notiamo subito che A è limitato, poiché $-1 \leq x_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

a) Proveremo che $\min A = -1$; basta provare che $\exists n \in \mathbb{N}, n \geq 1$:

$x_n = -1$; ova $x_n = -1 \Leftrightarrow \cos \frac{n\pi}{6} = -1$

$\Leftrightarrow \frac{n\pi}{6} = \pi + 2m\pi \quad m \in \mathbb{N}, m \geq 0$

Possiamo scegliere $n=6$ e concludere la dim.

b) Proviamo che $\max A = 1$. Procedendo come in a),
basta osservare che per $n=12$ si ha $X_{12} = \cos 2\pi = 1$
 $\in A$. □

ix) $A = \{ |x| : x^2 < -2x + 3 \}$.

Notiamo che $x^2 < -2x + 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 < 0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x-1) < 0$.

Quindi $x^2 < -2x + 3 \Leftrightarrow x \in]-3, 1[$.

Ne segue che $A = \{ |x| : x^2 < -2x + 3 \} = [0, 3[$ e
quindi A risulta limitato; inoltre $0 = \min A = \inf A$
e $\sup A = 3$. □

x) $A = \{ x : |x-1| \leq ||x-1|-2| \}$

Osserviamo che $|x-1| \leq ||x-1|-2| \Leftrightarrow$

$|x-1|-2 \leq -|x-1|$ o $|x-1|-2 \geq |x-1|$

$\Leftrightarrow |x-1| \leq 1$ o $0 \geq 2$

$\Leftrightarrow -1 \leq x-1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$

Quindi $A = [0, 2]$; si ha che A è limitato e $\min A = 0$, $\max A = 2$. ■

2) Vedi soluzioni pag. 14-15. ■

3) Scrivere in forma algebrica i seg. nr. complessi:

$(5-2i)(3-i) = (15-2) + i(-5-6) = \underline{13-11i}$;

$\frac{2+4i}{3} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}i$;

$\frac{2}{3-i} = \frac{2}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} = \frac{6+2i}{9+1} = \underline{\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i}$;

$$\frac{1+2i}{i-2} = \frac{1+2i}{-2+i} \cdot \frac{-2-i}{-2-i} = \frac{(-2+2i)+i(-1-4)}{4+1} = \frac{-i}{5}$$

$$4) \cdot \frac{1}{\bar{z}} = 1+i \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{z = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}} ;$$

$$\cdot \frac{\operatorname{Re} z}{z} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$$

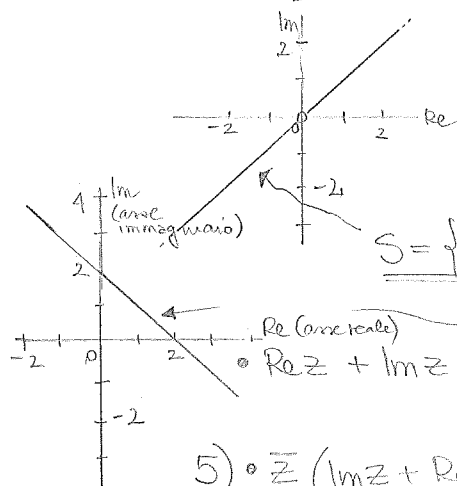
: Poniamo $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$. Si ha

$$2 \operatorname{Re} z = (\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z)(1-i) \Leftrightarrow$$

$$2 \operatorname{Re} z = (\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z) + i(-\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z)$$

$$0 = (-\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z) + i(-\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z)$$

$$\underline{S = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z, \operatorname{Re} z \neq 0\} = \{z \in \mathbb{C} : z = x + ix, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}}$$



$$\underline{S = \{z \in \mathbb{C} : z = x + (2-x)i, x \in \mathbb{R}\}}$$

5) $\cdot \bar{z}(\operatorname{Im} z + \operatorname{Re} z) = z$: Posto $z = x + iy$ possiamo scrivere

$$(x - iy)(y + x) = x + iy$$

$$\Leftrightarrow xy + x^2 - iy(y+x) = x + iy$$

$$\Leftrightarrow xy + x^2 - x - i(y^2 + yx + y) = 0 + i0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy - x = 0 \\ y^2 + yx + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+y-1) = 0 \\ y(y+x+1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{z_1 = 0}, \underline{z_2 = 0-i}, \underline{z_3 = 1+i0 = 1} \quad \square$$

$$\cdot \frac{z}{1+i} + \bar{z} = 1+i \Leftrightarrow \frac{z(1-i)}{2} + \bar{z} = 1+i$$

$$\Leftrightarrow z(1-i) + 2\bar{z} = 2+2i$$

$$\Leftrightarrow (x+iy)(1-i) + 2(x-iy) = 2+2i$$

$$z = x + iy$$

$$\Leftrightarrow x + y + i(y - x) + 2x - 2iy = 2 + 2i$$

$$\Leftrightarrow 3x + y + i(-y - x) = 2 + 2i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=2 \\ -y-x=2 \end{cases} \rightarrow y=2-3x \quad -2+3x-x=2 \Leftrightarrow 2x=4 \quad x=2$$

$$\Rightarrow y=2-6=-4$$

La soluzione è data da $z=2-4i$. $\square$

• $|z|\bar{z} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$: considerando il l. 1° a destra che a sinistra si ottiene $|z||\bar{z}| = |-\sqrt{2} + \sqrt{2}i|$; poiché $|z|=|\bar{z}|$ si ha $|z|^2 = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2$ e quindi $|z| = \sqrt{2}$.
 Dunque $\sqrt{2}\bar{z} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, da cui $\bar{z} = -1+i$. Infine $z = -1-i$. $\blacksquare$

6) • $z(\bar{z} + \operatorname{Re} z) = 3+i$: Ponendo $z = x+iy$ si ha

$$(x+iy)(x-iy+x) = 3+i, \text{ ossia}$$

$$(x+iy)(2x-iy) = 3+i.$$

Ne segue $2x^2 + y^2 + i(-xy + 2xy) = 3+i$, da cui

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 3 \\ xy = 1 \end{cases}$$

$$\text{si ha } \begin{cases} xy = 1 \\ 2x^2 + y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ 2x^2 + \frac{1}{x^2} - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ 2x^4 - 3x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} \end{cases} \begin{matrix} 1 \\ 1/2 \end{matrix}$$

Le soluzioni sono $z_1 = -1-i$; $z_2 = 1+i$; $z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}i$;

$$\underline{\underline{z_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}i.}} \quad \square$$

$$\bullet \frac{8}{z|z|} = \sqrt{3}+i \Rightarrow \frac{8}{|z|^2} = |\sqrt{3}+i| = 2 \Rightarrow |z|^2 = 4$$

$$\Rightarrow |z| = 2$$

Dunque $\frac{8}{z \cdot 2} = \sqrt{3}+i$, da cui

$$\frac{1}{z} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i \Rightarrow z = \frac{4}{\sqrt{3}+i} \cdot \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i} = \frac{4(\sqrt{3}-i)}{3-1}$$

La soluzione ricercata è $z = \sqrt{3} - i$. □

• $2z^2 + \bar{z} = -1$: Poniamo $z = x + iy$ e otteniamo

$$2(x + iy)^2 + (x - iy) = -1$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - y^2 + 2xyi) + x - iy + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - y^2) + x + 1 + i(4xy - y) = 0 (+ i 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2y^2 + x + 1 = 0 \\ y(4x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2x^2 + x + 1 = 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x = 1/4 \\ 2 \cdot \frac{1}{16} - 2y^2 + \frac{5}{4} = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/4 \\ 2y^2 = 11/8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/4 \\ y = \pm \frac{\sqrt{11}}{4} \end{cases}$$

La soluzione ricercata è quindi $z_1 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{11}}{4}i$, $z_2 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{11}}{4}i$. ■

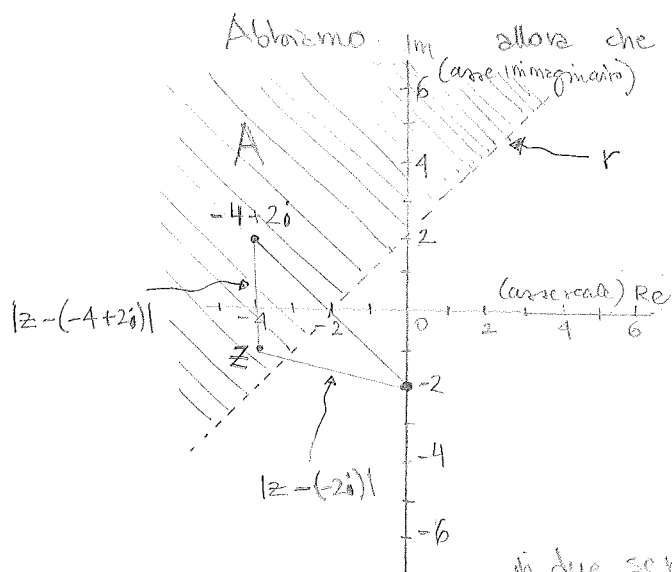
7) Osserviamo che, dati due numeri complessi $z = x + iy$ e $z_0 = x_0 + iy_0$, il modulo della loro differenza $|z - z_0|$ è la distanza fra i punti del piano che rappresentano z e z_0 : infatti

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

i) Risulta allora che

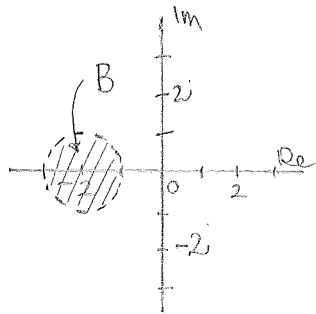
$|z + 2i| = |z - (-2i)|$ è la distanza di z da $-2i$;

$|z + 4 - 2i| = |z - (-4 + 2i)|$ è la distanza di z da $-4 + 2i$.

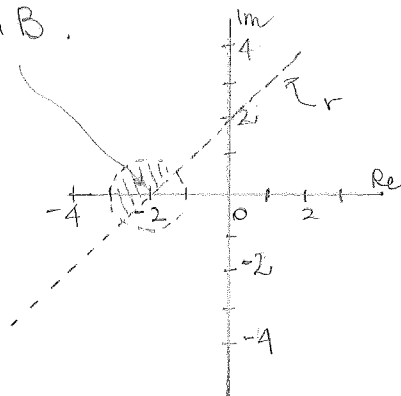


il punto $-2i$. (la zona tratteggiata e indicata con A) è l'insieme degli z per i quali è verificata la diseq. $|z+2i| > |z+4-2i|$.

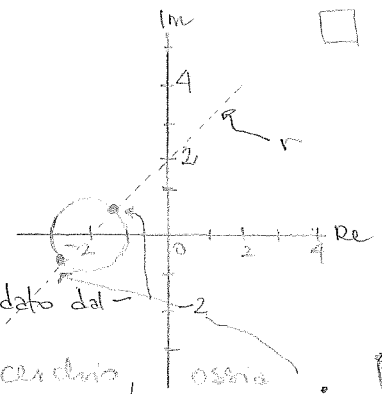
Analizziamo la disuguaglianza $|z+2| < 1$; essa è soddisfatta da tutti i punti del piano che appartengono al cerchio di centro -2 e raggio 1 , bordo escluso. Se chiamiamo B tale insieme,



l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ che verificano il sistema di disuguaglianze i) è dato dall'intersezione $A \cap B$.

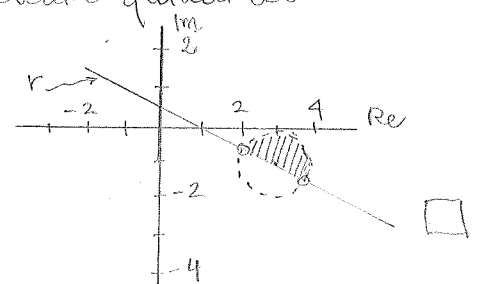


ii) Da quanto osservato sopra mi ha subito che l'insieme delle soluzioni del sistema è dato dall'intersezione della retta r con il bordo del cerchio, ossia.

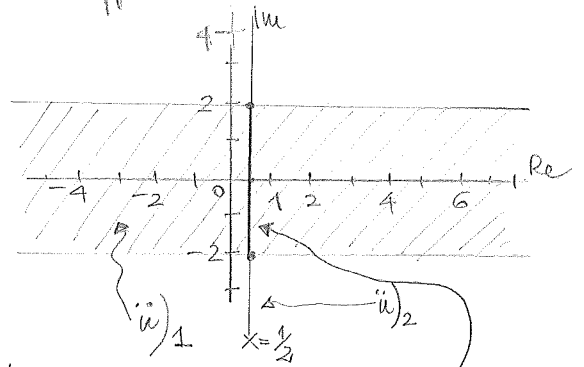


3) Studiamo il sistema i). Se $z = x + iy$, allora la prima diseq. si scrive $x + 2y \geq 1$, ossia $y \geq -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Pertanto i numeri complessi z che verificano questa diseq. corrispondono ai pt. del piano che si trovano sopra la retta r di eq. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

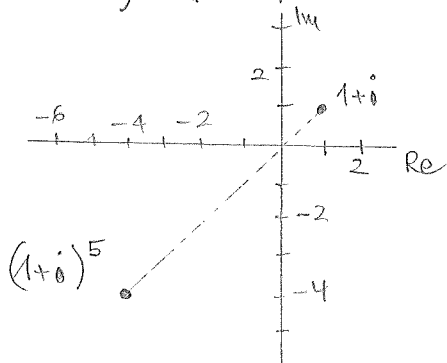
La seconda diseq. del sistema i) è soddisfatta dai punti del cerchio di centro $3-i$ e raggio 1 , bordo escluso. L'insieme delle soluzioni del sistema i) si rappresenta quindi col semicerchio tratteggiato in figura, dove il diametro appartiene al semicerchio ma la semicirconferenza è esclusa.



ii) Studiamo il sistema ii). La prima diseq. si scrive $|y| \leq 2$, ossia $-2 \leq y \leq 2$ se $z = x + iy$. Quindi i numeri complessi $z = x + iy$ che verificano la prima diseq. corrispondono ai pt. del piano di Gauss compresi tra la retta $y = -2$ e la retta $y = 2$, rette incluse. Infine, i numeri complessi z che verificano l'uguaglianza $|z| = |z-1|$ possono rappresentare come i pt. del piano che stanno sull'asse del segmento di estremi $z_1 = 0$ e $z_2 = 1$, cioè i pt. del piano appartenenti alla retta d'eq. $x = \frac{1}{2}$. Pertanto concludiamo dicendo che l'insieme delle soluzioni del sistema ii) è l'intersezione della regione tratteggiata (rette comprese) con la retta $x = \frac{1}{2}$, ossia il segmento, estremi inclusi, che si vede evidenziato in figura



g) • $(1+i)^5$: Notiamo che $z = 1+i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$.



Quindi

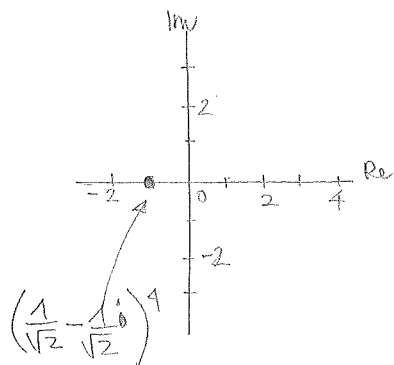
$$(1+i)^5 = (\sqrt{2})^5 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = 4\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = 4(-1-i) = \underline{\underline{-4-4i}}.$$

□

• $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i \right)^4$: Notiamo che $z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i = \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right)$.

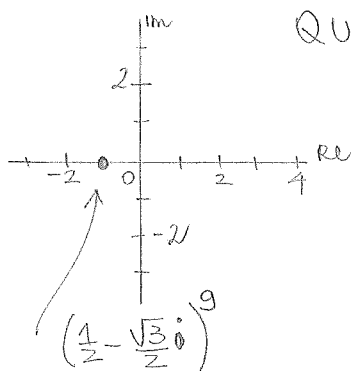
Quindi $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^4 = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^4$

$= \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = \underline{\underline{-1}}$ □



• $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^9$; Notiamo che $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

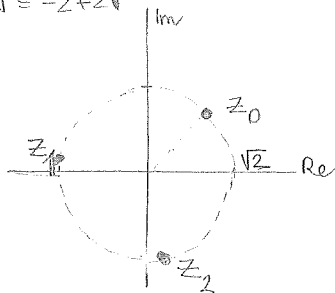
Quindi $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^9 = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^9 =$
 $= \cos\left(-\frac{3\pi}{1}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{1}\right) =$
 $= -1$ ■



10) $\sqrt[3]{2(i-1)}$: Abbiamo $w = 2(i-1) = -2 + 2i$

$= 2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2} \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

indica l'insieme
delle tre radici cubiche
di $w = -2 + 2i$



Le radici cubiche di w sono allora

$z_0 = (2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = (2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
 $= \underline{\underline{1 + i}} \quad (= \sqrt{2} (\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}))$

$z_1 = (2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} \left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right) = \sqrt{2} \left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$

$z_2 = (2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} \left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right) =$
 $= \underline{\underline{\sqrt{2} \left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)}}$ □

• $\sqrt[4]{z}$, dove $\bar{z} = 1 - i$; Allora $z = 1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

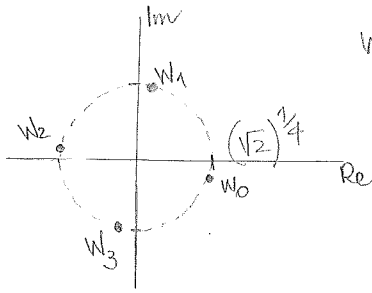
$= \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

indica l'insieme
delle quattro radici quarte
di $z = 1 - i$

Le radici quarte di z sono allora

$w_0 = (\sqrt{2})^{\frac{1}{4}} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{16}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{16}\right)\right)$

$w_1 = (\sqrt{2})^{\frac{1}{4}} \left(\cos\left(\frac{7\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{16}\right)\right)$



$$W_2 = (\sqrt{2})^{1/4} \left(\cos\left(\frac{15\pi}{16}\right) + i \sin\left(\frac{15\pi}{16}\right) \right)$$

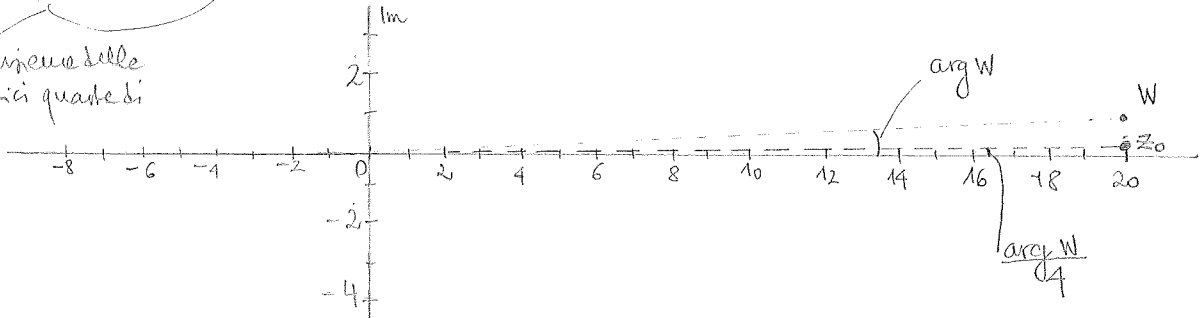
$$W_3 = (\sqrt{2})^{1/4} \left(\cos\left(\frac{23\pi}{16}\right) + i \sin\left(\frac{23\pi}{16}\right) \right)$$



$4\sqrt{i+20}$

Adesso $W = 20 + i$

Indica l'argomento delle quattro radici quarte di $W = 20 + i$

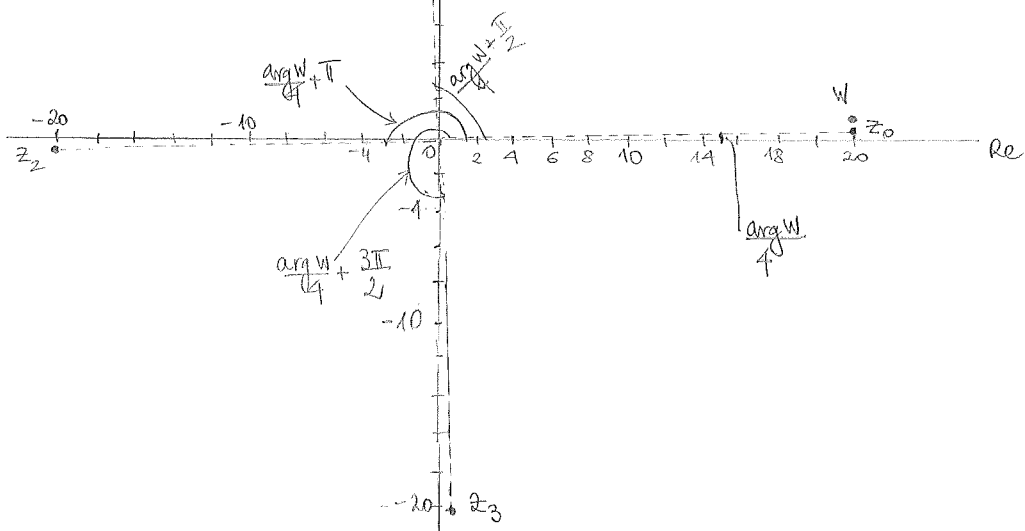


$$Z_0 = \sqrt[4]{401} \left(\cos\left(\frac{\arg W}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\arg W}{4}\right) \right)$$

$$Z_1 = \sqrt[4]{401} \left(\cos\left(\frac{\arg W}{4} + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\arg W}{4} + \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

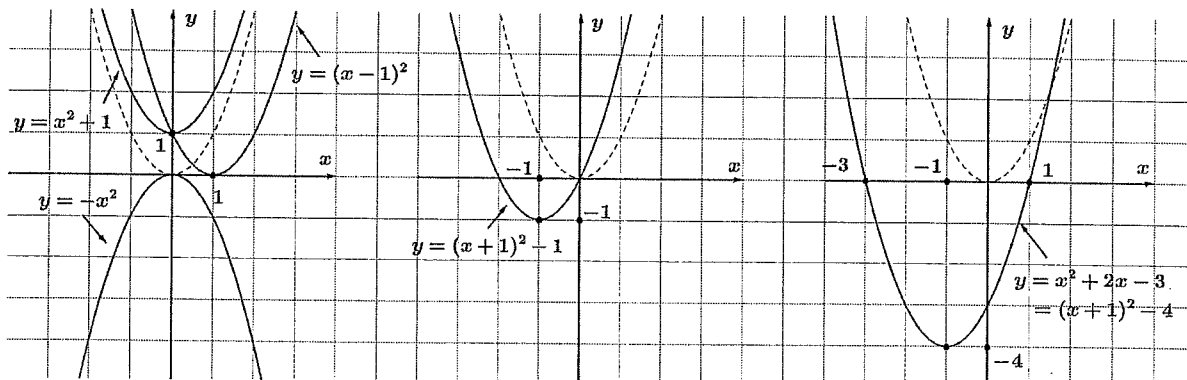
$$Z_2 = \sqrt[4]{401} \left(\cos\left(\frac{\arg W}{4} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{\arg W}{4} + \pi\right) \right)$$

$$Z_3 = \sqrt[4]{401} \left(\cos\left(\frac{\arg W}{4} + \frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\arg W}{4} + \frac{3\pi}{2}\right) \right)$$

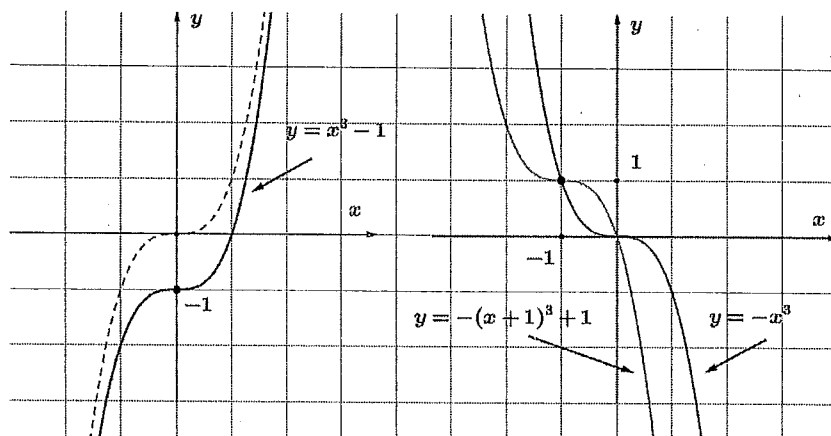


Esercizio 2

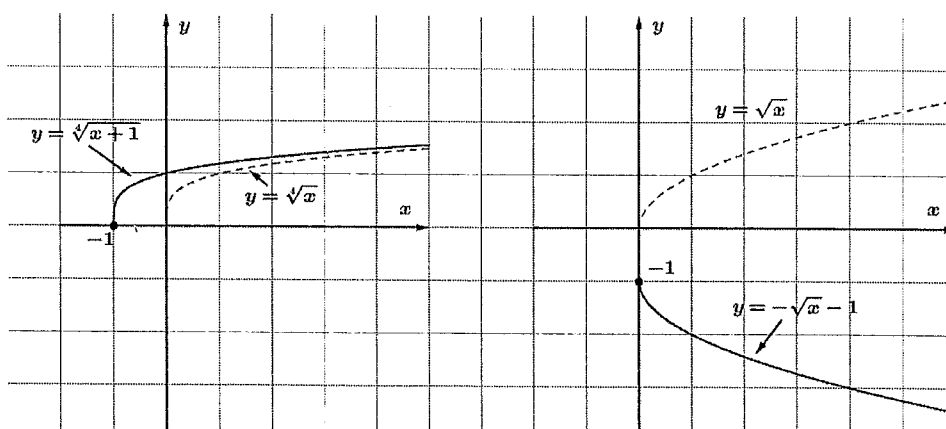
a)



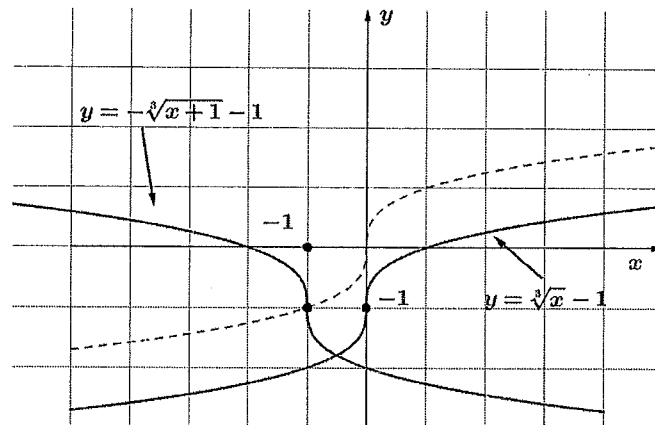
b)



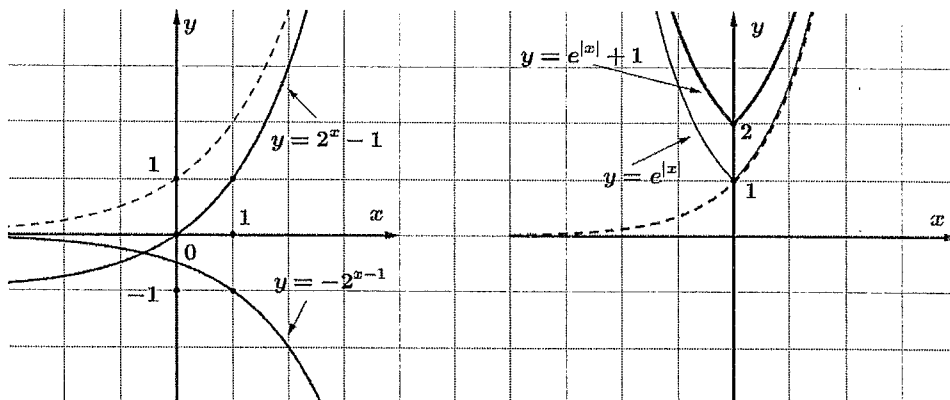
c)



d)



e)



f)

