

Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
 CdL in Informatica, Ingegneria dell'Informazione e delle Comunicazioni
 e Ingegneria dell'Informazione e Organizzazione d'Impresa
 a.a. 2015-2016 - Foglio di esercizi 2

1) i) " $\sum_{k=0}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0$ " : Sia $P(n) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$
 per $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$.

- Osserviamo che $P(0)$ è vero.
- Proviamo che $\forall n \geq 1$, supposto vero $P(n)$, risulta $P(n+1)$ vero.

Ora

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=0}^n \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{poteri} \\ \text{induttivo}}}{=} 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+2} - 2(n+2) + n+1}{2^{n+1}}$$

$$= 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}},$$

che è quanto si voleva dimostrare. Possiamo quindi afferire che $P(n)$ è vero $\forall n \in \mathbb{N}$. □

ii) " $n^2 \geq 2n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ " : Sia $P(n) = "n^2 \geq n+1"$ per $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$.

- Osserviamo che $P(3)$ è vero.
- Proviamo che $\forall n \geq 3$, supposto vero $P(n)$, risulta $P(n+1)$ vero.

Ora

$$\begin{aligned} (n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \geq \underbrace{(2n+1)}_{\substack{\uparrow \\ \text{poteri} \\ \text{induttivo}}} + 2n + 1 = (2n+2) + 2n \\ &\geq 2(n+1) + 1 \quad (\text{poiché } 2n \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1), \end{aligned}$$

che è quanto si voleva dimostrare. Possiamo quindi afferire che $P(n)$ è vero $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.

NOTA: Il passo induttivo si dimostra essere vero $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$, ma

la base induttiva si ottiene solo per $n \geq 3$, poiché $P(0)$, $P(1)$ e $P(2)$ sono falsi. □

iii) " $2^n \geq n^2$ per ogni $n \geq 4$ ": sia $P(n) = "2^n \geq n^2"$ per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$.

• Osserviamo che $P(4)$ è vero.

• Proviamo che $\forall n \geq 4$, supposto vero $P(n)$, risulta $P(n+1)$ vero.

Ora

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \geq n^2 \cdot 2 \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{p. induttiva} \end{matrix}$$

Abbiamo conclusa la dim. se proviamo che $2n^2 \geq (n+1)^2 \quad \forall n \geq 4$.

$$\text{Notiamo che } 2n^2 \geq (n+1)^2 \Leftrightarrow 2n^2 \geq n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow n^2 - 2n - 1 \geq 0.$$

e quest'ultima diseg. è vera $\forall n \geq 3$, e la dim. del passo

induttivo è concluso. Possiamo quindi afferire che $P(n)$ è

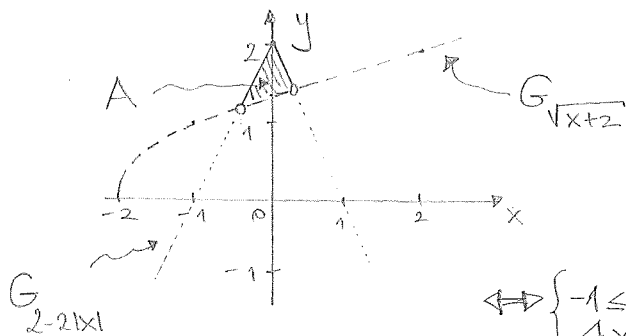
vero $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

NOTA: Il passo induttivo si dimostra essere vero $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$,

ma la base induttiva si ottiene solo per $n=4$, poiché $P(3)$ è falso.

Nota che $P(0)$, $P(1)$ e $P(2)$ sono vere, ma ciò non si deduce usando il principio di induzione. ■

2) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x+2} < y \leq 2-2|x|\}$.



Notiamo che $\sqrt{x+2} = 2-2|x|$

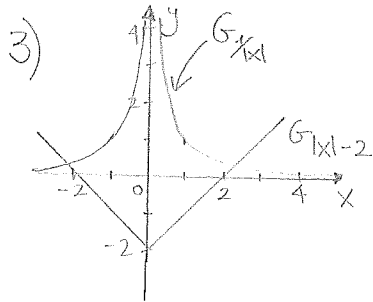
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x < 0 \\ 2+2x \geq 0 \\ x+2 = (2+2x)^2 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ 2-2x \geq 0 \\ x+2 = (2-2x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 0 \\ 4x^2 + 7x + 2 = 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 4x^2 - 9x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 0 \\ x_{1/2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 32}}{8} \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x_{1/2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{8} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 0 \\ x_{1/2} = \frac{-7 \pm \sqrt{17}}{8} \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x_{1/2} = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{8} \end{cases}$$

$B = \{x : (x,y) \in A\} = \left[\frac{-7 + \sqrt{17}}{8}, \frac{1}{4} \right[$, e quindi B è un intervallo. ■



Nota che $\begin{cases} \frac{1}{|x|} = x-2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 1 = 0 \\ x > 0 \end{cases}$
 $\Rightarrow x = 1 + \sqrt{2}$

Per la simmetria del problema risulta che

$A =]-1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}[\setminus \{0\}$, che non è un intervallo

Ne segue che $\inf A = -1-\sqrt{2}$, $\sup A = 1+\sqrt{2}$.

4) i) $f(x) = \log_2(x + \sqrt{x^2 - 1})$

$\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0, x + \sqrt{x^2 - 1} > 0\}$
 $= \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1 \vee x \geq 1, x + \sqrt{x^2 - 1} > 0\}$

Abbiamo

$\begin{cases} x \leq -1 \\ x + \sqrt{x^2 - 1} > 0 \end{cases} \circ \begin{cases} x \geq 1 \\ x + \sqrt{x^2 - 1} > 0 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ \sqrt{x^2 - 1} > -x \end{cases} \circ \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x^2 - 1} > -x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x^2 - 1 > x^2 \end{cases} \circ \begin{cases} x \geq 1 \\ \text{sempre verificata} \end{cases}$
 mai verificata!

$\Rightarrow \underline{\text{dom } f = [1, +\infty[}$

$g(x) = \sqrt{\frac{2}{x} + |x+1|}$

$\text{dom } g = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0, \frac{2}{x} + |x+1| \geq 0\}$
 $= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0, |x+1| \geq -\frac{2}{x}\}$

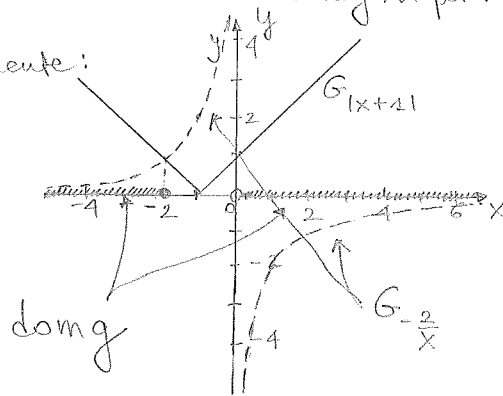
Abbiamo

$\begin{cases} x < 0 \\ |x+1| \geq -\frac{2}{x} \end{cases} \circ \begin{cases} x > 0 \\ |x+1| \geq -\frac{2}{x} \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 0 \\ x+1 \geq -\frac{2}{x} \end{cases} \circ \begin{cases} x \leq -1 \\ -x-1 \geq -\frac{2}{x} \end{cases} \circ \begin{cases} x > 0 \\ \text{sempre verificata} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 0 \\ x^2 + x + 2 \leq 0 \end{cases} \circ \begin{cases} x \leq -1 \\ x^2 + x - 2 \geq 0 \end{cases} \circ \begin{cases} x > 0 \end{cases}$
 impossibile $\rightarrow x \leq -2$

$\text{dom } g =]-\infty, -2] \cup]0, +\infty[$

Alla determinazione del dom g si poteva giungere facilmente anche graficamente:



$$\frac{2}{x} + |x+1| \geq 0$$

$$\Leftrightarrow |x+1| \geq -\frac{2}{x}$$

• Infine $A = \{x \in \text{dom } f : f(x) \leq 1\} = \{x \in [1, +\infty[: \log_2(x + \sqrt{x^2 - 1}) \leq 1\}$

$$= \{x \in [1, +\infty[: x + \sqrt{x^2 - 1} \leq 2\}$$

Ora $x + \sqrt{x^2 - 1} \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} \leq 2 - x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \text{dom } f & : & 2 - x \geq 0 \\ x^2 - 1 \leq (2 - x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2, \\ x^2 - 1 \leq 4 - 4x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 4x \leq 5 \end{cases}$$

$\Rightarrow A = [1, 5/4]$

$$B = \{x \in \text{dom } g : g(x) \leq 1\} = \{x \in \text{dom } g : \sqrt{\frac{2}{x} + |x+1|} \leq 1\}$$

$$= \{x \in \text{dom } g : \frac{2}{x} + |x+1| \leq 1\}$$

$$= \{x \in \text{dom } g : |x+1| \leq 1 - \frac{2}{x}\}$$

Altrimenti $\begin{cases} x \leq -2 \\ -x-1 \leq 1 - \frac{2}{x} \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x > 0 \\ x + \frac{2}{x} \leq 1 - \frac{2}{x} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x^2 + 2x - 2 \leq 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x > 0 \\ x^2 \leq -2 \text{ impossibile} \end{cases}$$

$\Rightarrow B = [-1 - \sqrt{3}, -2]$

Nota: anche in questo caso si poteva individuare B più semplicemente leggendo dal grafico di $G_{|x+1|}$ e $G_{1-2/x}$. □

$$\text{ii) } f(x) = \sqrt{1-x^3} + \sqrt{x^3+1} : \text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} : 1-x^3 \geq 0, x^3+1 \geq 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x^3 \leq 1, x^3 \geq -1\}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\text{dom } f = [-1, 1]}}$$

Osserviamo che $\text{dom } f$ è un insieme simmetrico rispetto all'origine.

$$\text{Inoltre } f(-x) = \sqrt{1-(-x)^3} + \sqrt{(-x)^3+1} = \sqrt{1+x^3} + \sqrt{-x^3+1} = f(x) \quad \forall x \in \text{dom } f.$$

Quindi f è una funzione pari.

f non è iniettiva essendo una funzione pari !! □

$$\text{iii) } f(x) = \log_3 \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) : \text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} : \sin x - \frac{1}{2} > 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : \sin x > \frac{1}{2}\}$$

$$= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right[.$$

f non è iniettiva! Per esempio, $x_1 = \frac{\pi}{3} \neq x_2 = \frac{2\pi}{3}$, ma $f(x_1) = f(x_2)$.

Notiamo che $\forall x \in \text{dom } f$ si ha

$$0 < \sin x - \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

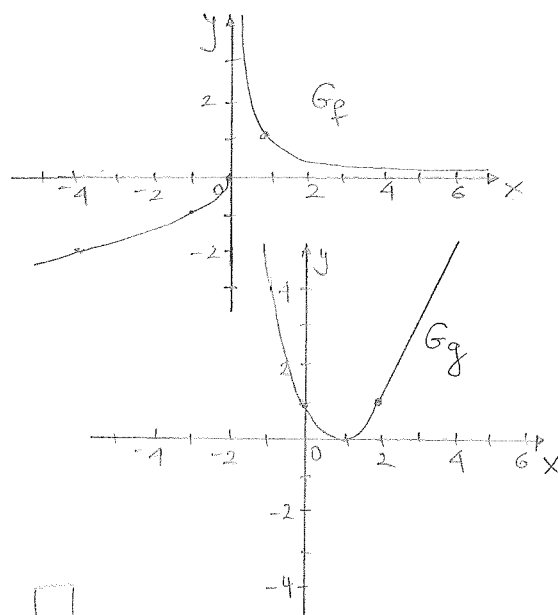
$$\text{Quindi } f(x) = \log_3 \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) \leq \log_3 \frac{1}{2} = -\log_3 2 < 0 \quad \blacksquare$$

$$5) f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} & \text{se } x > 0 \\ -\sqrt{|x|} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{se } x \geq 2 \\ x^2-2x+1 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

$\hookrightarrow (x-1)^2$



$$\text{i) } \bullet \text{ im } f = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

$$\text{im } g = g(\mathbb{R}) = [0, +\infty[. \quad \square$$

$\bullet f$ è iniettiva e suriettiva in $\mathbb{R}$; g non è iniettiva ($g(0) = g(2)!$ per esempio) e non è suriettiva, poiché $g(\mathbb{R}) \subsetneq \mathbb{R}$. □

ii) Poiché $\text{dom } f = \text{dom } g = \mathbb{R}$, le funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$ sono definite $\forall x \in \mathbb{R}$. Abbiamo

$$(g \circ f)(x) \underset{x \in \mathbb{R}}{=} g(f(x)) = \begin{cases} 2f(x) - 3 & \text{se } f(x) \geq 2 \\ (f(x))^2 - 2f(x) + 1 & \text{se } f(x) < 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2 \cdot \frac{1}{x^3} - 3 & \text{se } 0 < x \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ \left(\frac{1}{x^3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{x^3} + 1 & \text{se } x > \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ (-\sqrt{|x|})^2 - 2(-\sqrt{|x|}) + 1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{x^3} - 3 & \text{se } 0 < x \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ \frac{1}{x^6} - \frac{2}{x^3} + 1 & \text{se } x > \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ |x| + 2\sqrt{|x|} + 1 & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

$$(f \circ g)(x) \underset{x \in \mathbb{R}}{=} f(g(x)) = \begin{cases} \frac{1}{g(x)^3} & \text{se } g(x) > 0 \\ -\sqrt{|g(x)|} & \text{se } g(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{(2x-3)^3} & \text{se } x \geq 2 \\ \frac{1}{(x^2-2x+1)^3} & \text{se } x < 2, x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$



6) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 - 1$ $g(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ \log x & \text{se } x > 0. \end{cases}$

Poiché $\text{dom } f = \text{dom } g = \mathbb{R}$, le funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$ sono definite $\forall x \in \mathbb{R}$. Abbiamo

$$(g \circ f)(x) \underset{x \in \mathbb{R}}{=} g(f(x)) = \begin{cases} f(x)^3 + 1 & \text{se } f(x) \leq 0 \\ \log(f(x)) & \text{se } f(x) > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (x^2 - 1)^3 + 1 & \text{se } x \in [-1, 1] \\ \log(x^2 - 1) & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]. \end{cases}$$

$$(f \circ g)(x) \underset{x \in \mathbb{R}}{=} f(g(x)) = \begin{cases} (x^3 + 1)^2 - 1 & \text{se } x \leq 0 \\ (\log x)^2 - 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$



7) i) a) $M \in \mathbb{R}$ è un maggiorante di f se $f(x) \leq M \quad \forall x \in A$.

b) $\lambda \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di f se $\lambda = \sup f(A)$

[potete anche scrivere: $\lambda \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di f se è il minimo dei maggioranti di f ;

oppure: $\lambda \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di f se i) $f(x) \leq \lambda \quad \forall x \in A$, e

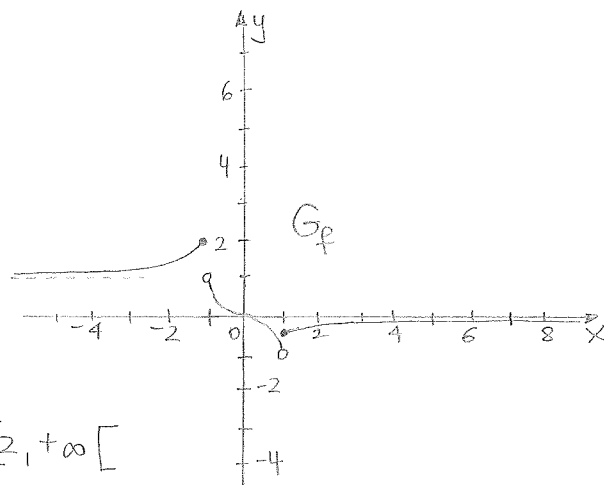
ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A : \lambda - \varepsilon < f(x)$].

c) $M \in \mathbb{R}$ è massimo di f se i) $f(x) \leq M \quad \forall x \in A$

ii) $\exists x_0 \in A : f(x_0) = M$. $\square$

ii) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} + 1 & \text{se } x \leq -1 \\ -x^3 & \text{se } -1 < x < 1 \\ -2^{-x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$



a) insieme dei maggioranti di $f = [2, +\infty[$

insieme dei minoranti di $f =]-\infty, -1]$ $\square$

b) $\inf_{\mathbb{R}} f = -1$ non è minimo!

$\sup_{\mathbb{R}} f = 2$ è massimo,

poiché $f(-1) = 2$. $\blacksquare$

8) i) $h(x) = \sin^2 x - 2 \sin x - 1$, $f(x) = \sin x$.

Preso $g(x) = x^2 - 2x - 1$ si ha $h(x) = (g \circ f)(x)$. $\square$

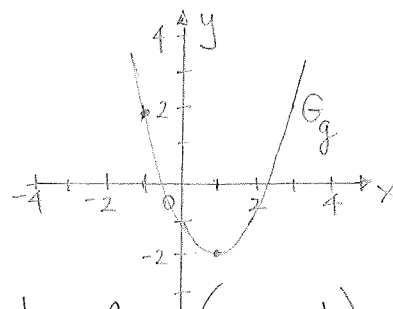
ii) Osserviamo che $g(x) = (x-1)^2 - 2$

Notiamo che $-1 \leq f(x) \leq 1$ e

$$h(\mathbb{R}) = g([-1, 1]) = \underline{\underline{[-2, 2]}}$$

si ha $\inf_{\mathbb{R}} h = -2$ ($= \min_{\mathbb{R}} h$)

$\sup_{\mathbb{R}} h = 2$ ($= \max_{\mathbb{R}} h$) $\blacksquare$



g) i) $\boxed{a_n = \cos \frac{1}{n+1} \quad n \geq 0.} : \in [0, 1] \subset [0, \pi]$

Osservo che $x_n = \frac{1}{n+1}$ è decrescente su $\mathbb{N}$ ($x_{n+1} < x_n \quad \forall n \geq 0$)
e $\cos x$ è decrescente su $[0, \pi]$. Ne segue che la funzione
composta $a_n = \cos x_n$ è crescente su $\mathbb{N}$, $n \geq 0$.

$\boxed{b_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right) \quad n \geq 1} : \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Osservo che $x_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}$ è crescente su $\mathbb{N}$, $n \geq 1$ ($x_{n+1} > x_n \quad \forall n \geq 1$)
e $\sin x$ è crescente su $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ne segue che la funzione
composta $b_n = \sin x_n$ è crescente su $\mathbb{N}$, $n \geq 1$. □

ii) $\boxed{a_n = \frac{n^2+1}{n^2-1} \quad n \geq 2.}$

Notiamo che $a_n = \frac{n^2-1}{n^2-1} + \frac{2}{n^2-1} = 1 + \frac{2}{n^2-1}$. Risulta che
 $\{a_n\}$ è decrescente su $\mathbb{N}$, $n \geq 2$. Infatti,

$$a_{n+1} \leq a_n \Leftrightarrow \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2-1} \leq \frac{n^2+1}{n^2-1}$$

$$\Leftrightarrow (n^2+2n+2)(n^2-1) \leq (n^2+1)(n^2+2n)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{n^4} - \cancel{n^2} + 2\cancel{n^3} - 2n + 2\cancel{n^2} - 2 \leq \cancel{n^4} + 2\cancel{n^3} + \cancel{n^2} + 2n$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq 4n \quad \Leftrightarrow n \geq -\frac{1}{2}.$$

$\boxed{b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2-5n} \quad n \geq 0}$

Notiamo che $x_n = n^2 - 5n \in [-6, +\infty[$ è crescente

$\forall n \geq 2$: infatti $x_{n+1} \geq x_n \Leftrightarrow (n+1)^2 - 5(n+1) \geq n^2 - 5n$

$$\Leftrightarrow \cancel{n^2} + 2n + 1 - 5\cancel{n} - 5 \geq \cancel{n^2} - 5\cancel{n}$$

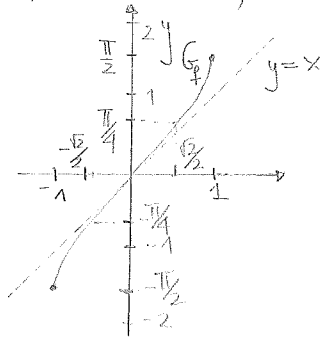
$$\Leftrightarrow 2n \geq 4 \quad \Leftrightarrow n \geq 2.$$

Osserviamo che $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ è decrescente su $\mathbb{R}$. Ne segue che

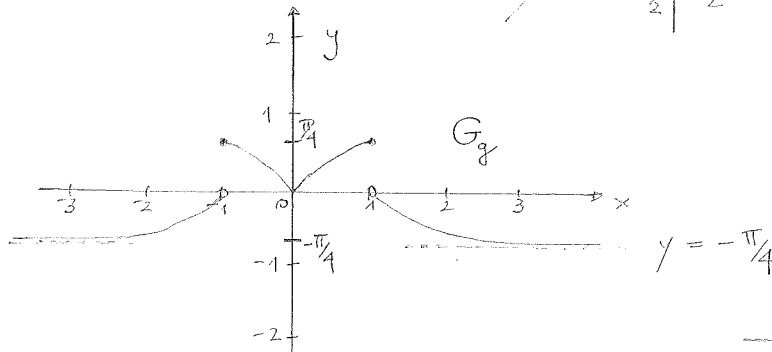
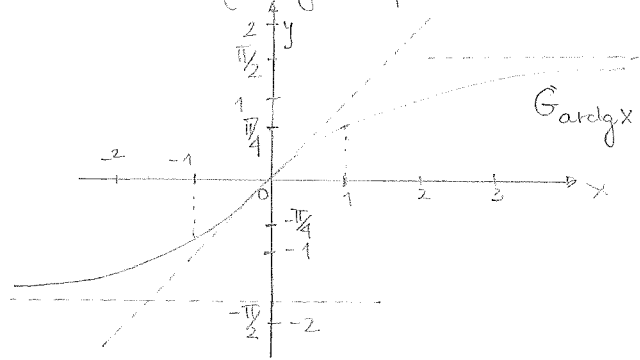
$\{b_n\}$ è decrescente su $\mathbb{N}$, $n \geq 2$. ■

(è strettamente decrescente su $\mathbb{N}$, $n \geq 3$).

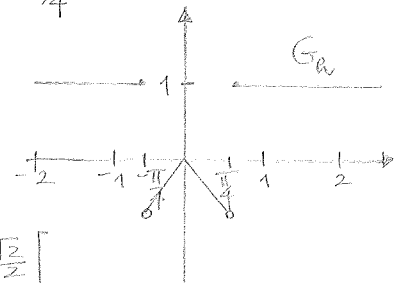
10) $f(x) = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$



$g(x) = \begin{cases} \arctg|x| & \text{se } x \in [-1, 1] \\ -\arctg|x| + \frac{\pi}{4} & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \end{cases}$



$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $h(x) = \begin{cases} -|x| & \text{se } |x| < \frac{\pi}{4} \\ -1 & \text{altrimenti} \end{cases}$



Allora $(h \circ f)(x) = \begin{cases} -|\arcsin x| & \text{se } x \in]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}[\\ 1 & \text{se } x \in [-1, 1] \setminus]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}[\end{cases}$

$(h \circ g)(x) = \begin{cases} -|\arctg|x|| & \text{se } x \in]-1, 1[\\ -|-\arctg|x| + \frac{\pi}{4}| & \text{se } x < -1 \text{ o } x > 1 \\ 1 & \text{se } x = -1 \text{ o } x = 1 \end{cases}$

$= \begin{cases} -\arctg|x| & \text{se } x \in]-1, 1[\\ -\arctg|x| + \frac{\pi}{4} & \text{se } x < -1 \text{ o } x > 1 \\ 1 & \text{se } x = -1 \text{ o } x = 1 \end{cases}$

11) i) $f: [-1, +\infty[\rightarrow f([-1, +\infty[)$ definita da $f(x) = x^2 + 2x - 1 =$

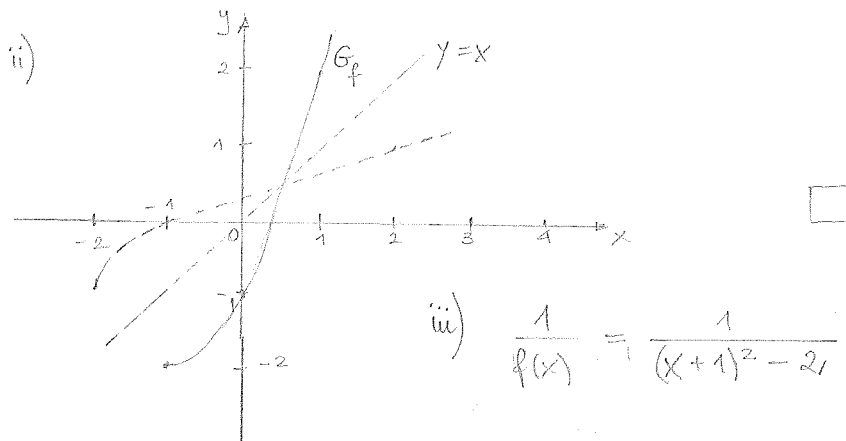
$(x+1)^2 - 2$. Quindi $f([-1, +\infty[) = [-2, +\infty[$. f è iniettiva e

suriettiva. Quindi esiste inversa: $\forall y \geq -2$ si ha

$y = (x+1)^2 - 2 \Leftrightarrow y+2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x+1 = \sqrt{y+2} \Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{y+2}$

Possiamo allora scrivere

$f^{-1}: [-2, +\infty[\rightarrow [-1, +\infty[$ $f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{x+2}$.



iii) $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{(x+1)^2 - 2}$

dom $\frac{1}{f} = \{x \in \text{dom } f : f(x) \neq 0\}$
 $= [-1, +\infty[\setminus \{-1+\sqrt{2}\}$

Nota: $\frac{1}{f(0)} = -1$

$f^{-1}(0) = -1+\sqrt{2}$

$\frac{1}{f(2)} = \frac{1}{7}$

$f^{-1}(2) = 1$

$\frac{1}{f(7)} = \frac{1}{62}$

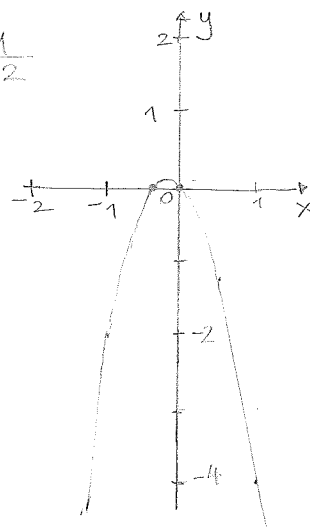
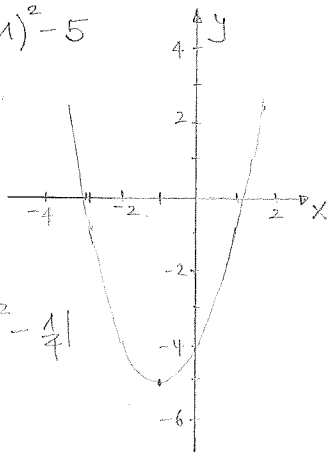
$f^{-1}(7) = 2$

12)i) $y = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$
 $= a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$. Quindi posto $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$

si ha $y = a(x - x_0)^2 + y_0$.

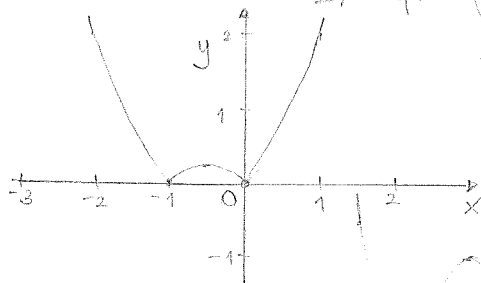
ii) $f(x) = -3x^2 - x = -3(x^2 + \frac{x}{3}) = -3(x + \frac{1}{6})^2 + \frac{1}{12}$

$f(x) = x^2 + 2x - 4 = (x+1)^2 - 5$



$f(x) = |-x^2 - x|$

$= |x^2 + x| = |(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}|$



$f(x) = ||x^2 + 2x - 3| - 5|$

$= |(x+1)^2 - 4| - 5|$

$\leftarrow |x^2 + 2x - 3|$

