Università di Trento – Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
CdL in Informatica, Ingegneria dell'informazione e delle comunicazioni e
Ingegneria dell'informazione e organizzazione d'impresa
a.a. 2015 – 2016 — Foglio di esercizi 4

1) i) $\boxed{A = \{x_n = \cos\left(\pi + \frac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\}}$

Osserviamo che $-1 \leq x_n \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Quindi A è limitato.

Ora $x_n = \cos(a_n)$, con $a_n = \pi + \frac{1}{n}$. Poiché $(a_n)_n$ è strettamente decrescente (banale verifica!) e $\pi \leq a_n \leq \pi + 1$ $\forall n \geq 1$, e $\cos x$ è strett. crescente su $[\pi, 2\pi]$ otteniamo che x_n è una successione strett. decrescente su $\mathbb{N}$. Dal teorema di "esistenza del limite per funzioni monotone" segue che

$\underline{\underline{\inf A}} = \lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} \cos\left(\pi + \frac{1}{n}\right) \underset{\uparrow}{=} \cos\pi = \underline{\underline{-1}}$. D'altra

continuità della funzione coseno

parte $\underline{\underline{\sup A = \max A}} = x_1 = \underline{\underline{\cos(\pi + 1)}}$. □

ii) $\boxed{B = \{x_n = \cos\left(\pi - \frac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\}}$

Come sopra si prova che B è un insieme limitato.

Ora $x_n = \cos(a_n)$, con $a_n = \pi - \frac{1}{n}$. Poiché $(a_n)_n$ è strett. crescente (banale verifica!) e $\pi - 1 \leq a_n \leq \pi$ $\forall n \geq 1$ e $\cos x$ è strett. decrescente su $[0, \pi]$, otteniamo che x_n è una succ. strett. decrescente su $\mathbb{N}$. Dal teorema di "esistenza del limite per funzioni monotone" segue che

$\underline{\underline{\inf A}} = \lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} \cos\left(\pi - \frac{1}{n}\right) = \cos\pi = \underline{\underline{-1}}$; d'altra parte

$\underline{\underline{\sup A}} = \max A = x_1 = \underline{\underline{\cos(\pi - 1)}}$. □

iii) $\boxed{C = \{x_n = \sin\left(\pi + \frac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\}}$

Anche qui la limitatezza di C segue come sopra.

Ora $x_n = \sin(a_n)$ con $a_n = \pi + \frac{1}{n}$. Abbiamo $(a_n)_n$ strett. decrescente e $\pi \leq a_n \leq \pi + 1$ $\forall n \geq 1$, e anche $\sin x$ strett. decrescente su $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$. Quindi $(x_n)_n$ è strett. crescente su $\mathbb{N}$.
Dal teorema di "esistenza del limite per funzioni monotone" segue che $\underline{\underline{\sup A}} = \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\pi + \frac{1}{n}\right) = \underline{\underline{\sin \pi = 0}}$.
continuità della funzione seno

D' altra parte $\underline{\underline{\inf A}} = \min A = x_1 = \underline{\underline{\sin(\pi+1)}}$.

□

iv) $\boxed{D = \left\{x_n = \arccos\left(\frac{1-n}{2+n}\right),\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 0\right\}}$

Osserviamo che $\frac{1-n}{2+n} = -1 + \frac{3}{2+n}$ $\forall n \geq 0$, e quindi
$-1 \leq a_n = \frac{1-n}{2+n} \leq -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \leq 1$ $\forall n \geq 0$ e x_n è ben definito.
Inoltre $0 \leq x_n \leq \pi$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$ e quindi D è limitato.
Si verifica banalmente che $(a_n)_n$ è una successione strett. decrescente su $\mathbb{N}$.
Poiché $\arccos x$ è strett. decrescente su $[-1,1]$, si ottiene che $x_n = \arccos a_n$ è strett. crescente su $\mathbb{N}$. Risulta allora, analog. a sopra che
$\underline{\underline{\inf A = \min A = x_1 = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}}}$, mentre
$\underline{\underline{\sup A}} = \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \arccos\left(-1 + \frac{3}{2+n}\right) = \arccos(-1) = \underline{\underline{\pi}}$.
continuità della funzione arcocoseno

■

2) • $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-\operatorname{arctg}\left(\alpha \log(1-\alpha x^3)\right)}{x^3(2-\cos 2x)} & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{\sin x + 2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Dalla continuità delle funzioni coinvolte e i teoremi riguardanti la somma, prodotto, rapporto, composizione ... di funzioni continue, basta determinare $\alpha > 0$ tale che f risulti continua in $x_0 = 0$, ossia $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$.

Ora $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{-\operatorname{arctg}\left(\alpha \log(1-\alpha x^3)\right)}{x^3\,(2-\cos 2x)} =$

$$= \lim_{x\to 0^-} \underbrace{\frac{-\operatorname{arctg}\left(\alpha \log(1-\alpha x^3)\right)}{\alpha \log(1-\alpha x^3)}}_{\to 1 \text{ poiché } \frac{\operatorname{arctg}\square}{\square} \xrightarrow[\text{se } \square\to 0]{} 1} \cdot \alpha \frac{\log(1-\alpha x^3)}{-\alpha x^3} \cdot \frac{-\alpha \cancel{x^3}}{\cancel{x^3}\underbrace{(2-\cos 2x)}_{\to 1}}$$

$\to 1$ poiché $\dfrac{\log(1+\square)}{\square} \xrightarrow[\text{se } \square\to 0]{} 1$

$$= \alpha^2.$$

Dall'altra parte, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \sqrt{2}$ e quindi f risulta continua in $x_0 = 0$ se e solo se $\alpha^2 = \sqrt{2}$, ossia $\alpha = \sqrt[4]{2}$. □

• $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{3^{2x} - 1} & \text{se } x \le 1 \\ \dfrac{\sin(x-1)}{\log x^\beta} & \text{se } x > 1. \end{cases}$

Come sopra, basta determinare $\beta > 0$ tale che g risulti continua in $x_0 = 1$, ossia $\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^+} g(x) = g(1)$.

Ora $\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{\sin(x-1)}{\log x^\beta} = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{\sin(x-1)}{\log(1+(x-1))^\beta} =$

$$= \lim_{x\to 1^+} \underbrace{\frac{\sin(x-1)}{(x-1)}}_{\to 1} \cdot \frac{x-1}{\beta \underbrace{\log(1+(x-1))}_{\to 1}} = \frac{1}{\beta}$$

poiché $\dfrac{\sin\square}{\square} \xrightarrow[\text{se } \square\to 0]{} 1$ $\qquad \dfrac{\log(1+\square)}{\square} \xrightarrow[\text{se } \square\to 0]{} 1$

Dall'altra parte, $\lim_{x\to 1^-} g(x) = g(1) = \sqrt[3]{9-1} = 2$ e quindi g risulta continua in $x_0 = 1$ se e solo se $\frac{1}{\beta} = 2$, ossia $\beta = \frac{1}{2}$. ■

3) i) • $\lim_{x\to +\infty} \left(\cos \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{2x} \underset{\boxed{1^\infty}}{=} \boxed{e^{-1}}$.

Infatti $\left(\cos \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{2x} = e^{2x \log\left(\cos \frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = e^{2x \log\left(1 + \left(\cos\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)\right)}$

$$= e^{2x\,\frac{\log\left(1+\left(\cos\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)\right)}{\cos\frac{1}{\sqrt{x}}-1}\cdot\left(\cos\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)} =$$

$$= e^{\underbrace{\frac{\log\left(1+\left(\cos\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)\right)}{\cos\frac{1}{\sqrt{x}}-1}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{\cos\frac{1}{\sqrt{x}}-1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}}_{\to -\frac{1}{2}}} \xrightarrow{x\to+\infty} \underline{\underline{e^{-1}}}.$$

$\square$

- $\lim\limits_{x\to0^+}(\sin x)^x = \boxed{1}$. $\quad\boxed{0^0}$

Infatti $(\sin x)^x = e^{x\log(\sin x)}$

$$\lim_{x\to0^+}(\sin x)^x \underset{y=\sin x}{=} \lim_{y\to0^+} e^{\arcsin y\,\log y} = \lim_{y\to0^+} e^{\overbrace{\frac{\arcsin y}{y}}^{\to 1}\cdot\overbrace{y\log y}^{\to 0}} = e^0 = 1.$$

$\square$

- $\lim\limits_{x\to0^+}\operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{x}\log_2 x}\right) = \boxed{\frac{\pi}{2}}$.

Infatti, $\sqrt[3]{x}\log_2 x \to 0$ per $x\to0^+$, ed è negativa in un intorno destro di 0;

Quindi $\frac{-1}{\sqrt[3]{x}\log_2 x} \xrightarrow[x\to0^+]{} +\infty$ e si ha $\lim\limits_{x\to0^+}\operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{x}\log_2 x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

$\blacksquare$

ii) - $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{arctg} x}} = \boxed{e^{1/3}}$. $\quad\boxed{1^\infty}$

Infatti $\sqrt[3]{1+x}^{\,\frac{1}{\operatorname{arctg} x}} = e^{\frac{1}{\operatorname{arctg} x}\cdot\frac{1}{3}\log(1+x)} =$

$$= e^{\underbrace{\frac{x}{\operatorname{arctg} x}}_{\to 1}\cdot\overbrace{\frac{\log(1+x)}{x}}^{\to 1}\cdot\frac{1}{3}} \xrightarrow[x\to0^+]{} \underline{\underline{e^{1/3}}}.$$

- $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^{\frac{1}{\operatorname{arctg} x}} = \boxed{1}$. $\quad\boxed{1^\infty}$

Infatti $\sqrt[3]{1+x^2}^{\,\frac{1}{\operatorname{arctg} x}} = e^{\frac{1}{\operatorname{arctg} x}\,\frac{1}{3}\log(1+x^2)} =$

$$= e^{\underbrace{\frac{x}{\operatorname{arctg} x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{\log(1+x^2)}{x^2}}_{\to 1}\cdot\overbrace{\frac{x}{3}}^{\to 0}} \xrightarrow[x\to0^+]{} e^0 = \underline{1}.$$

- $\lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt[3]{1+x}\right)^{\frac{1}{\sin x^2}} = \boxed{+\infty}$ $\boxed{1^\infty}$

Infatti $\sqrt[3]{1+x}^{\frac{1}{\sin x^2}} = e^{\frac{x^2}{\sin x^2}\cdot\frac{1}{3}\frac{\log(1+x)}{x}\cdot\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty.$

$\frac{x^2}{\sin x^2}\to 1$, $\frac{\log(1+x)}{x}\to 1$, $\frac{1}{x}\to+\infty$

4) • $\lim_{x\to 0^+} x e^{1+\frac{1}{x}} = +\infty$. Infatti

$$\lim_{x\to 0^+} x e^{1+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{1+\frac{1}{x}}}{1/x} \underset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to+\infty}\frac{e\cdot e^y}{y} = +\infty.$$

Abbiamo

• $\lim_{x\to 0^+}\left(x e^{1+\frac{1}{x}}\right)^x = \boxed{e}$. $\boxed{\infty^0}$

Infatti $\left(x e^{1+\frac{1}{x}}\right)^x = e^{x\log\left(x e^{1+\frac{1}{x}}\right)} =$

$$= e^{x\log x + x\log\left(e^{1+\frac{1}{x}}\right)} = e^{x\log x + x\left(1+\frac{1}{x}\right)\log e}$$

$$= e^{x\log x + x + 1} \xrightarrow[x\to 0^+]{} e.$$

5) i) • $\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+3^{\alpha x}+x^{10}}{e^x+100x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+(3^\alpha)^x+x^{10}}{e^x+100x^2} = \begin{cases} +\infty & \text{se } 3^\alpha > e \\ 1 & \text{se } 3^\alpha = e \\ 0 & \text{se } 3^\alpha < e \end{cases}$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > \log_3 e \\ 1 & \text{se } \alpha = \log_3 e \\ 0 & \text{se } \alpha < \log_3 e. \end{cases}$$

$$\underset{\log_3 e = \frac{1}{\log 3}}{=} \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > \frac{1}{\log 3} \\ 1 & \text{se } \alpha = \frac{1}{\log 3} \\ 0 & \text{se } \alpha < 1/\log 3. \end{cases}$$

• $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^n-2^n}{n+3^n} = \boxed{0}$: infatti $\frac{e^n-2^n}{n+3^n} = \frac{e^n\left(1-\frac{2^n}{e^n}\right)}{3^n\left(\frac{n}{3^n}+1\right)}$

$$= \frac{e^n}{3^n}\frac{\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{\left(\frac{n}{3^n}+1\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \text{ poiché } \left(\frac{e}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

$\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$, $\frac{n}{3^n}\to 0$

nota: $0<\frac{e}{3}<1$

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n-2^n}{n-2e^n} = \boxed{-\frac{1}{2}}$: infatti $\displaystyle\frac{e^n-2^n}{n-2e^n} = \frac{\cancel{e^n}\left(1-\overbrace{\left(\frac{2}{e}\right)^n}^{\to 0}\right)}{\cancel{e^n}\left(\underbrace{\frac{n}{e^n}}_{\to 0}-2\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{1}{2}.$ $\square$

ii) • $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{4n}\right)^{2n} \underset{\boxed{1^\infty}}{=} \boxed{e^{1/2}}$: infatti $\displaystyle\left[\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{4n}\right]^{1/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{1/2}.$ $\square$

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+4}{n-2}\right)^{n} \underset{\boxed{1^\infty}}{=} \boxed{e^{6}}$: infatti $\displaystyle\left(\frac{n+4}{n-2}\right)^{n} = \left(1+\frac{6}{n-2}\right)^{n} =$

$$= \left[\left(1+\frac{6}{n-2}\right)^{n-2}\right]^{\frac{n}{n-2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^6 .\quad \square$$

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n-4}{n-2}\right)^{n} \underset{\boxed{1^\infty}}{=} \boxed{e^{-2}}$: infatti $\displaystyle\left(\frac{n-4}{n-2}\right)^{n} = \left(1-\frac{2}{n-2}\right)^{n} =$

$$= e^{n\log\left(1-\frac{2}{n-2}\right)} = e^{n\cdot\frac{(-2)}{n-2}\cdot\overbrace{\frac{\log\left(1-\frac{2}{n-2}\right)}{\frac{-2}{n-2}}}^{\to 1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-2}. \quad \square$$

iii) • $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n+n^2} \underset{\boxed{\infty^0}}{=} \boxed{1}$: infatti

$$\sqrt[n]{n+n^2} = e^{\frac{1}{n}\log(n+n^2)} = e^{\frac{1}{n}\left[2\log n+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0 = 1 \quad \square$$

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{2}-1\right)^{n} \underset{\boxed{0^\infty}}{=} \boxed{0}$

che non è una forma indeterminata!!

: infatti $\displaystyle\left(\sqrt[n]{2}-1\right)^{n} = e^{\overbrace{n}^{+\infty}\overbrace{\log(\underbrace{\sqrt[n]{2}-1}_{\to 0})}^{\to -\infty}} \to 0.$ $\square$

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n\log n^2} \underset{\boxed{\infty^0}}{=} \boxed{1}$: $\forall n \geq 3 \quad 1 \leq \log n \leq n$

quindi $n < n\log n \leq n^2 \Rightarrow \sqrt[n]{n\log n} \to 1$;

si ha $\displaystyle\sqrt[n]{n\cdot 2\log n} = \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n\log n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 .$ $\square$

IV) • $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n^4+\cos n)}{\log(n^5+\operatorname{arctg} n)} \underset{\boxed{\frac{\infty}{\infty}}}{=} \boxed{\frac{4}{5}}$: $\displaystyle\frac{\log\left[n^4\left(1+\frac{\cos n}{n^4}\right)\right]}{\log\left[n^5\left(1+\frac{\operatorname{arctg} n}{n^5}\right)\right]} =$

$$= \frac{4\log n + \log\left(1+\overbrace{\frac{\cos n}{n^4}}^{\to 0}\right)}{5\log n + \log\left(1+\underbrace{\frac{\operatorname{arctg} n}{n^5}}_{\to 0}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{4}{5}. \quad \square$$

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_2(n+2^n)-n}{\log_2(3n+2^n)-n} \underset{\frac{\infty-\infty}{\infty-\infty}}{=} \boxed{\frac{1}{3}}$

$$\frac{\cancel{\log_2 2^n} + \log_2\left(1+\frac{n}{2^n}\right) \cancel{-n}}{\cancel{\log_2 2^n} + \log_2\left(1+\frac{3n}{2^n}\right) \cancel{-n}} =$$

$$= \frac{\log_2\left(1+\frac{n}{2^n}\right)}{\frac{n}{2^n}} \cdot \frac{\cancel{n}}{\cancel{2^n}} \cdot \frac{\cancel{2^n}}{3\cancel{n}} \cdot \frac{\frac{3n}{2^n}}{\log_2\left(1+\frac{3n}{2^n}\right)}$$

$$= \frac{\log\left(1+\frac{n}{2^n}\right)}{\frac{n}{2^n}\cancel{\log 2}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{3n}{2^n}}{\log\left(1+\frac{3n}{2^n}\right)} \cancel{\log 2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3}.$$

□

v) • $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\arcsin \frac{1}{n}}{\log(n+2)-\log n} = \boxed{\frac{1}{2}}$.

$$: \frac{\arcsin\frac{1}{n}}{\log(n+2)-\log n} = \frac{\arcsin\frac{1}{n}}{1/n} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\log\left(1+\frac{2}{n}\right)} =$$

$$= \frac{\arcsin\frac{1}{n}}{1/n} \cdot \frac{\frac{2}{n}}{\log\left(1+\frac{2}{n}\right)} \cdot \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

$\to 1 \qquad \to 1$

□

• $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{n-1}\right)}{\sqrt{9+\frac{1}{n}}-3} \underset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \boxed{12}$.

$$: \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{n-1}\right)}{\frac{2}{n-1}} \cdot \frac{\frac{2}{n-1}}{3\left(\sqrt{1+\frac{1}{9n}}-1\right)} =$$

$$= \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{n-1}\right)}{\frac{2}{n-1}} \cdot \frac{\frac{2}{n-1}}{\cancel{3}\left(\cancel{1}+\frac{1}{\cancel{9}_3 n}\cancel{-1}\right)} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{9n}}+1$$

$$\to 4 \cdot 3 = 12.$$

■

6) • $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha \sin\frac{1}{2^n} = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Se $\alpha \le 0$. $n^\alpha \sin\frac{1}{2^n} = \frac{1}{n^{-\alpha}} \sin\frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Se $\alpha > 0$, $n^\alpha \sin\frac{1}{2^n} =$

$$= n^\alpha \frac{\sin\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} \cdot \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

$\to 1$

□

• $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\log(1+n^\alpha)}{\log n} = \begin{cases} \alpha & \text{se } \alpha > 0 \\ 0 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$

Infatti, se $\alpha > 0$ $\frac{\log(1+n^\alpha)}{\log n} = \frac{\alpha \log n + \log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)}{\log n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$.

se $\alpha=0$ $\quad \dfrac{\log(2)}{\log n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$;

se $\alpha<0$ $\quad \dfrac{\log(1+n^\alpha)}{\log n} = \dfrac{\log\left(1+\frac{1}{n^{-\alpha}}\right)}{\frac{1}{n^{-\alpha}}} \cdot \dfrac{1}{n^{-\alpha}\log n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$ □

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\log_2(2^n+1)}{n^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha<1 \\ 1 & \text{se } \alpha=1 \\ 0 & \text{se } \alpha>1. \end{cases}$

Infatti $\quad \dfrac{\log_2(2^n+1)}{n^\alpha} = \dfrac{\log_2\left[2^n\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\right]}{n^\alpha} = \dfrac{n\log_2 2 + \log_2\left(1+\frac{1}{2^n}\right)}{n^\alpha}$

$= \dfrac{n + \log_2\left(1+\frac{1}{2^n}\right)}{n^\alpha} \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha<1 \\ 1 & \text{se } \alpha=1 \\ 0 & \text{se } \alpha>1. \end{cases}$ ■

7) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-\cos\alpha^n}{n^{\alpha-1}} = \begin{cases} 1-\cos 1 & \text{se } \alpha=1 \\ 0 & \text{se } \alpha>1 \\ 0 & \text{se } 0<\alpha<1. \end{cases}$

Infatti, se $\alpha>1$ $\quad \left|\dfrac{1-\cos\alpha^n}{n^{\alpha-1}}\right| \leq \dfrac{2}{n^{\alpha-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$;

se $0<\alpha<1$, allora $\alpha^n \to 0$ e

$$\frac{1-\cos\alpha^n}{n^{\alpha-1}} = \frac{1-\cos\alpha^n}{(\alpha^n)^2}\cdot\frac{(\alpha^n)^2}{n^{\alpha-1}} = \underbrace{\frac{1-\cos\alpha^n}{(\alpha^n)^2}}_{\to\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\frac{n^{1-\alpha}}{\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)^n}}_{\to 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$ ■

8) $\lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{\left[(n+1)^n - n^{n+1}\right]}_{[\infty-\infty]} = \boxed{-\infty}$.

Infatti, $(n+1)^n - n^{n+1} = n^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - n^n\cdot n =$

$= \underbrace{n^n}_{\to+\infty}\Big[\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e} - \underbrace{n}_{\to-\infty}\Big] \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty.$ ■