

Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
CdL in Informatica, Ingegneria dell'Informazione e delle Comunicazioni e
Ingegneria dell'Informazione e Organizzazione d'Impresa.
a.a. 2015-2016 - Foglio di esercizi 0

$$\begin{array}{lcl}
 1) a) & A : & V \ V \ F \ F \\
 & B : & V \ F \ V \ F \\
 & \text{non } B : & F \ V \ F \ V \\
 & A \Rightarrow B : & V \ F \ V \ V \\
 & (\text{non } B) \vee (A \Rightarrow B) : & F \ F \ F \ V \\
 & \text{non } A : & F \ F \ V \ V \\
 & [(\text{non } B) \vee (A \Rightarrow B)] \Rightarrow \text{non } A : & \underline{\underline{V \ V \ V \ V}} \quad \square
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 b) & A : & V \ F \\
 & \text{non } A : & F \ V \\
 & A \vee (\text{non } A) : & F \ F \\
 & \text{non}[A \vee (\text{non } A)] : & \underline{\underline{V \ V}}
 \end{array}$$

2) a) $A =$ "Il corso di AM 1 non è svolto al 1° anno del CdL in Informatica";
 $B =$ "La frequenza del corso di AM 1 è fortemente consigliata".

La proposizione data si scrive " $A \vee B$ ".

La sua negazione si scrive " $(\text{non } A) \vee (\text{non } B)$ ", e, in parole, si ha:

"Il corso di AM 1 non è svolto al 1° anno del CdL in Informatica o la sua frequenza non è fortemente consigliata". $\square$

b) $A =$ "La studentessa Anna Bianchi studia con grande impegno";

$B =$ "La studentessa Anna Bianchi supera l'esame di AM 1".

La proposizione data si scrive " $A \Rightarrow B$ ".

La sua negazione si scrive " $A \vee (\text{non } B)$ ", e, in parole, si ha:

"La studentessa Anna Bianchi studia con grande impegno e non supera l'esame di AM 1". $\square$

c) $A(x,y) =$ "Durante il primo semestre lo studente x del CdL in Informatica frequenta il corso y previsto dal Manifesto degli Studi".

La proposizione data si scrive " $\forall x, \exists y : A(x,y)$ ".

La sua negazione si scrive " $\exists x : \forall y, \text{non } A(x,y)$ ", e, in parole, si ha:

"Durante il primo semestre c'è (almeno) uno studente del CdL in Informatica che non frequenta alcun corso previsto dal Manifesto degli Studi". $\square$

d) $A(x,y)$ = "Il corso x del CdL in Informatica è frequentato dallo studente y ".

La proposizione data si scrive: " $\exists x: \forall y, A(x,y)$ ".

La sua negazione si scrive " $\forall x, \exists y: \text{non } A(x,y)$ ", e, in parole, si ha:

"Per ogni corso del CdL in Informatica c'è (almeno) uno studente che non lo frequenta". ■

3)i) " $\exists x: Q(x)$ " : "Nel 2014 c'è stato un corso del CdL in Informatica frequentato da 250 studenti".

" $\forall x, Q(x)$ " : "Nel 2014 tutti i corsi del CdL in Informatica sono stati frequentati da 250 studenti".

" $Q(AM1)$ " : "Nel 2014 il corso di AM1 del CdL in Informatica è stato frequentato da 250 studenti". □

ii) " $\exists y: \forall x, P(x,y)$ " : "C'è (almeno) una rivista scientifica che si trova nelle biblioteche di tutti i dipartimenti dell'Univ. di Trento".

" $\forall x, \exists y: P(x,y)$ " : "Nelle biblioteche di tutti i dipartimenti dell'Univ. di Trento si trova (almeno) una rivista scientifica".

" $\exists y: P(\text{Mat.}, y)$ " : "C'è (almeno) una rivista scientifica che si trova nella biblioteca del dipartimento di Matematica dell'Univ. di Trento".

I primi due enunciati non sono equivalenti: nella prima proposizione la rivista scientifica è la medesima per le biblioteche di tutti i dipartimenti; nella seconda proposizione la rivista scientifica può essere diversa in ogni biblioteca. □

iii) " $\exists y: \forall x, \exists z: \text{non } A(x,y,z)$ " : "In (almeno) una città italiana tutte le palestre sono aperte (almeno) un giorno".

" $\exists z: \forall x, y, A(x, y, z)$ " : "C'è (almeno) un giorno in cui in tutte le città italiane tutte le palestre sono chiuse".

" $\forall y, \exists x: A(x, y, \text{lunedì})$ " : "In tutte le città italiane c'è (almeno) una palestra chiusa il lunedì." 

4) a) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{N}: x - y \leq 0$ (V) : Se $x \in \mathbb{Z}$ e $x \leq 0$, allora basta prendere $y = 0$ e si ha $x \leq y$.

Se $x \in \mathbb{Z}$ e $x > 0$, allora basta prendere $y = x$ e si ha $x - y = x - x \leq 0$. 

b) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{Z}: 4x + 2y = 0$ (V) : Prendo $x \in \mathbb{N}$ arbitrario, si ha che $4x + 2y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{4x}{2} = -2x$. Essendo $x \in \mathbb{N}$ si ha $y = -2x \in \mathbb{Z}$, e quindi quanto si vuole. 

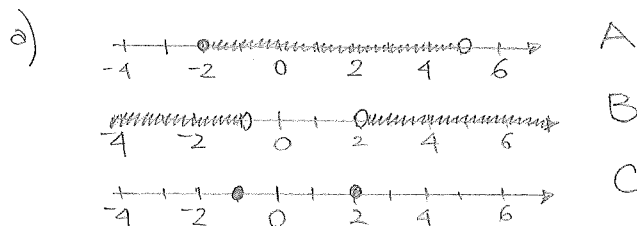
c) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{Z}: 2x - 4y = 0$ (F) : Infatti, preso $x \in \mathbb{N}$ arbitrario si ha che $2x - 4y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{x}{2}$. Ora tale $y \in \mathbb{Z}$ se e solo se x è pari; altrimenti no. 

d) $\forall x, y \in \mathbb{R}, [(x \neq y) \Rightarrow (x^2 \neq y^2)]$ (F); infatti è vero la sua negazione! " $\exists x, y \in \mathbb{R}: (x \neq y) \wedge (x^2 = y^2)$ ". Basta prendere $x = 1, y = -1$. 

e) $\exists x \in \mathbb{Q}: \forall y \in \mathbb{R}, (2x + 1)y = 0$ (V) : basta prendere $x \in \mathbb{Q}$ tale che $2x + 1 = 0$; ossia $x = -\frac{1}{2}$.

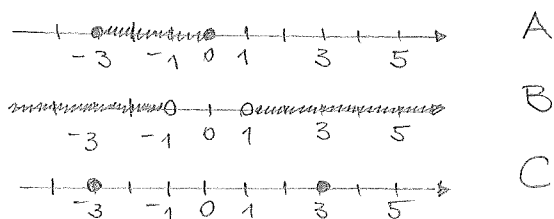
f) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{N}: (y + 1)x \geq 0$ (F): 
Se $x \in \mathbb{Z}$ e $x < 0$, allora $\forall y \in \mathbb{N}$ si ha $x(y + 1) < 0$. 

5) $A = [-2, 5[$ $B =]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$ $C = \{-1, 2\}$



b) $-1 \in B$ (F); $\{-1\} \subseteq C$ (V); $A \cap C = C$ (V);
 $4 \in A$ (F) scrittura scorretta! $\{4\} \subset A$ (V) $4 \in A$ (V);
 $]2, 5[\subset A$ (V);
 $C \subseteq \mathbb{R} \setminus B$ (V), poiché $\mathbb{R} \setminus B = [-1, 2]$;
 $C \setminus A \neq \emptyset$ (F).

6) a) $A = \{x \in \mathbb{R} : -x^2 \geq 3x\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 3x \leq 0\} = \underline{\underline{[-3, 0]}}$
 $B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x^2} < 1\} = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1-x^2}{x^2} < 0\} = \underline{\underline{]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[}}$
 $C = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 - 9)(x^2 + 2) = 0\} = \underline{\underline{\{-3, 3\}}}$.



b) $A \cup B = \underline{\underline{]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[}}$; $A \cap B = \underline{\underline{[-3, -1[}}$;
 $B \setminus A = \underline{\underline{]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[}}$; $\mathbb{R} \setminus B = \underline{\underline{[-1, 1]}}$.

A e B non sono disgiunti, poiché $A \cap B \neq \emptyset$.

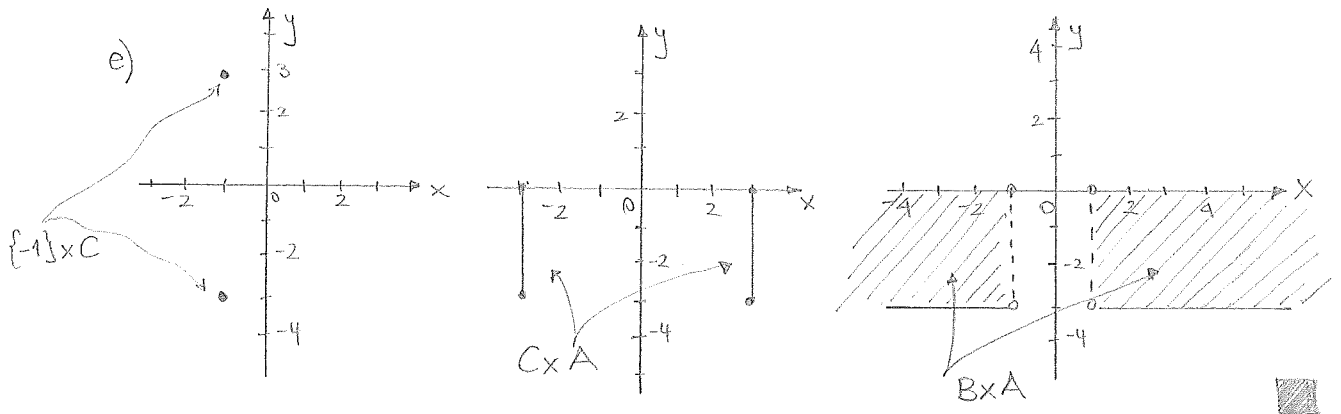
c) A è un intervallo, mentre B non lo è!

d) $[-1, 0] \in \mathcal{P}(A)$ (V); $\{-2, 2\} \subseteq B$ (V);

$C = [-3, 3]$ (F); $A \cap C = \{-3\}$ (V);

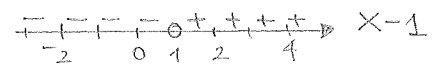
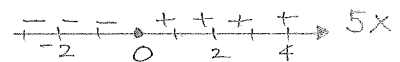
$B \subseteq \mathcal{P}(B)$ (F) scorretto la scrittura!

$C \in \mathcal{P}(B)$ (V).



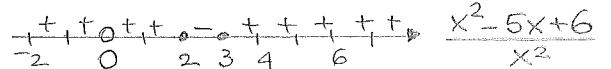
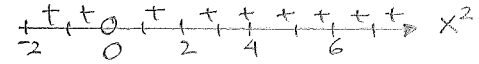
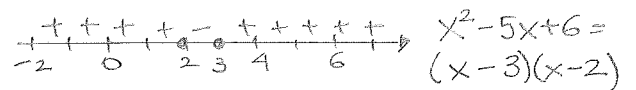
$$7)i) A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{4x + x^2}{x-1} \geq x \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{4x + x^2 - x^2 + x}{x-1} \geq 0 \right\}$$

$$= \underline{\underline{]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[}}$$



$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2} > 0 \right\}$$

$$= \underline{\underline{]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[\setminus \{0\}}}$$



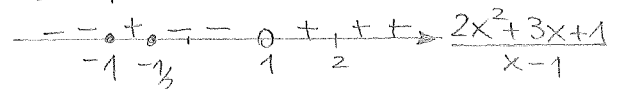
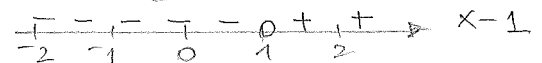
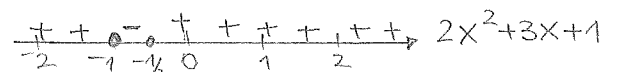
$$C = \{ x \in \mathbb{R} : |(x^2 - 4)(x^2 - 1)| \leq 0 \} = \{ x \in \mathbb{R} : |(x^2 - 4)(x^2 - 1)| = 0 \}$$

$$= \underline{\underline{\{-2, -1, 1, 2\}}}$$

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 + 5x}{x-1} \leq 1-x \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 + 5x + x^2 - 2x + 1}{x-1} \leq 0 \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{2x^2 + 3x + 1}{x-1} \leq 0 \right\}$$

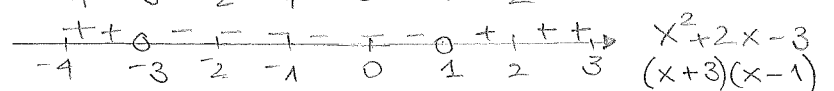
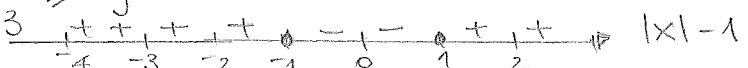
$$= \underline{\underline{]-\infty, -1] \cup [-\frac{1}{2}, 1[}}$$



$$E = \{ x \in \mathbb{R} : -x^2 + x \leq x \} = \{ x \in \mathbb{R} : -x^2 \leq 0 \} = \underline{\underline{\mathbb{R}}}$$

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{|x| - 1}{x^2 + 2x - 3} \geq 0 \right\}$$

$$= \underline{\underline{]-\infty, -3[\cup [-1, +\infty[\setminus \{1\}}}$$



ii) A, B non sono né limitati inferiormente, né limitati superiormente.

D è limitato superiormente, ma non è limitato inferiormente.

Possibili maggioranti sono $M \in [1, +\infty[$.

C è limitato. Possibili minoranti sono $m \in]-\infty, -2]$ e

possibili maggioranti sono $M \in [2, +\infty[$.

Infine $\min C = -2$, $\max C = 2$.

