

Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
 CdL in Informatica - CdL in Ingegneria dell'Informazione e delle Comunicazioni
 CdL in Ingegneria dell'Informazione e Organizzazione d'Impresa
 SECONDA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA 1
 a.a. 2015-2016 - Trento, 19 dicembre 2015

FILA (A)

21) $f'(x) = \left[(e^{2x} + \log(1+x)) \sin x \right]' = \left[\left(2e^{2x} + \frac{1}{1+x} \right) \sin x + (e^{2x} + \log(1+x)) \cos x \right]$. $\square$

22) Basta richiedere la continuità e derivabilità di f in $x_0 = 0$ (in tutti gli altri pt. f è continua e derivabile qualunque siano α e β):

$f(x)$ è continua in $x_0 = 0 \iff \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \iff \boxed{\beta = 3}$.

Quindi poniamo $f(x) = \begin{cases} \sin x + 3(x+1) & \text{se } x < 0 \\ 2x + 3 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.

Perché f è continua in $x_0 = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\cos x + 3) = 4$ e

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 2$, f è derivabile in $x_0 = 0 \iff 4 = 2$, ossia $\boxed{d = 2}$. $\square$

23) $(f^{-1})'(\pi+1) = \frac{1}{f'(\pi)} = \frac{1}{[1 + \sin x]_{\pi}} = \boxed{1}$. $\square$

24) $f(x) = x e^{\frac{1}{1-|x|}}$ $\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} : 1 - |x| \neq 0\} = \boxed{\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}}$. $\square$

25) $f(x) = \sin 2x - \log(1+x)$
 $= 2x + o(x^2) - \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, per $x \rightarrow 0$. Quindi

$\boxed{P_2(x) = x + \frac{x^2}{2}}$. $\square$

26) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - \cos x^2}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + 2x + o(x) - 1 + o(x)}{3x} = \boxed{\frac{2}{3}}$. $\square$

27) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{2\beta+3}} < +\infty \iff 2\beta+3 > 1 \Rightarrow \boxed{\beta > -1}$. $\square$

28) $y = F(0) + F'(0)(x-0)$: ora $F(0) = 0$, $F'(x) \stackrel{\text{TFC}}{=} (2+x^2)e^{x^2} + x$
 e quindi $F'(0) = 2$.

L'eq. della retta tg cercata è $\boxed{y = 2x}$. $\square$

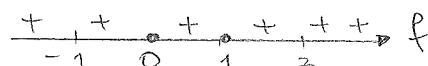
29) $\int \left(e^{2x} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \boxed{\frac{e^{2x}}{2} - \log|x+2| + c, \quad c \in \mathbb{R}}$. $\square$

$$a) \int_1^4 \frac{2+\sin x}{(x-1)^{2\alpha}} dx < +\infty \iff 2\alpha < 1 \implies \boxed{\alpha < \frac{1}{2}}.$$

$$b) i) \boxed{f(x) = \frac{|x^2 - x|}{x^2 + 1}}$$

$$\bullet \text{ dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$$

$$\bullet \text{ segno di } f : f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}, \text{ e } f(x) = 0 \iff x = 0, 1$$



$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \quad y = 1 \text{ asintoto orizzontale per } f, \text{ per } x \rightarrow -\infty \text{ (per } x \rightarrow +\infty).$$

$\bullet f$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ essendo somma/composizione/rapporto di funzioni continue (e il denominatore non si annulla mai).

$$\bullet \text{ Osserviamo che } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x^2 + 1} & \text{se } x \leq 0 \text{ o } x \geq 1 \\ \frac{-x^2 + x}{x^2 + 1} & \text{se } 0 < x < 1. \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{(2x-1)(x^2+1) - (x^2-x)2x}{(x^2+1)^2} & \text{se } x < 0 \text{ o } x > 1 \\ \frac{(-2x+1)(x^2+1) - (-x^2+x)2x}{(x^2+1)^2} & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 1}{(x^2 + 1)^2} & \text{se } x < 0 \text{ o } x > 1 \\ \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)^2} & \text{se } 0 < x < 1. \end{cases}$$

$$\text{Notiamo che } \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -1 = f'_-(0) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1 = f'_+(0)$$

$\implies x=0$ pr. di non derivabilità di f
pr. angoloso

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -\frac{1}{2} = f'_-(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \frac{1}{2} = f'_+(1) \implies x=1 \text{ pr. di non derivabilità di } f$$

pr. angoloso.

Infine

$$f'(x) = 0 \iff x^2 + 2x - 1 = 0 \text{ con } x < 0 \text{ o } x > 1.$$

$$\hookrightarrow x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

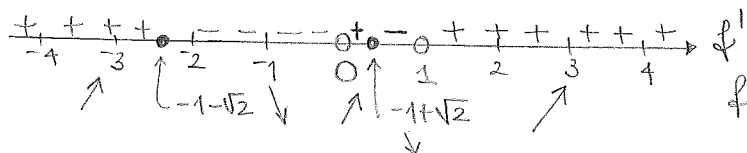
Poiché deve essere $x < 0$ o $x > 1$, solo $x = -1 - \sqrt{2}$ è accettabile.

oppure $\bullet\bullet$) $-x^2 - 2x + 1 = 0$ con $0 < x < 1$

$$\hookrightarrow x_{2/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{-2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

L'unica soluzione accettabile è $x = -1 + \sqrt{2}$.

Abbiamo così



$\Rightarrow x = -1 - \sqrt{2}$ è pt. di massimo loc. stretto per f

$$f(-1 - \sqrt{2}) = \frac{|(-1 - \sqrt{2})^2 + 1 + \sqrt{2}|}{(-1 - \sqrt{2})^2 + 1} = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}} (> 1)$$

$\Rightarrow x = -1 + \sqrt{2}$ è pt. di massimo loc. stretto per f

$$f(-1 + \sqrt{2}) = \frac{|(-1 + \sqrt{2})^2 + 1 - \sqrt{2}|}{(-1 + \sqrt{2})^2 + 1} = \frac{|4 - 3\sqrt{2}|}{4 - 2\sqrt{2}} \sim 0.2.$$

□

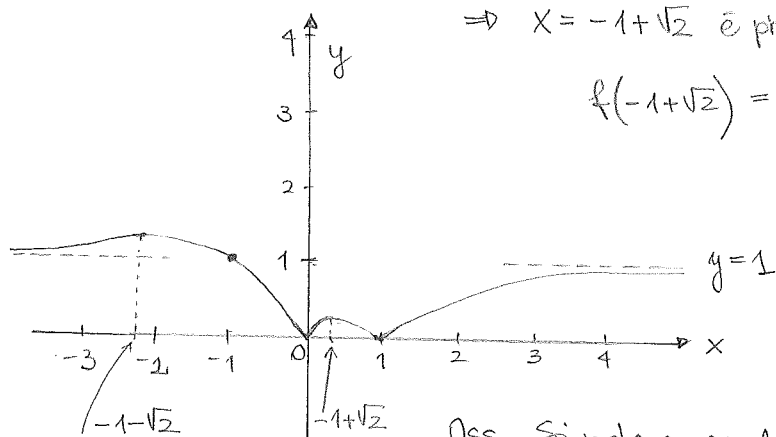


Grafico qualitativo di f

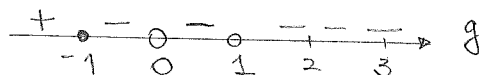
Oss. Si poteva anche studiare prima la funzione

$$h(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + 1} \text{ e poi considerare } f(x) = |h(x)|. \quad \square$$

ii) $g(x) = \log(f(x))$

• $\text{dom } g = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

• Notiamo che $f(x) \geq 1$ solo per $x \leq -1$



• $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ $y = 0$ asintoto orizz. per g ,
per $x \rightarrow -\infty$ (per $x \rightarrow +\infty$);

$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$ $x = 0$ asintoto verticale per g
(da destra e da sinistra);

$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -\infty$ $x = 1$ asintoto verticale per g
(da destra e da sinistra).

La funzione logaritmica è una funzione strettamente crescente, e conserva quindi la monotonicità della funzione $f(x)$ e quindi

potremmo disegnare subito il grafico di g (senza ripetere lo studio di funzione!! ma non è vietato farlo!)

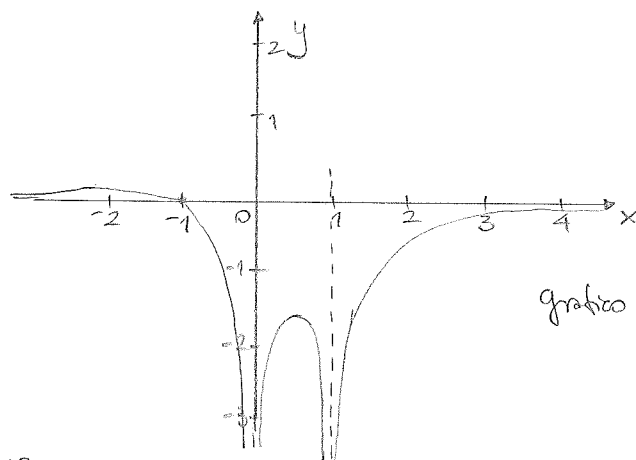


grafico qualitativo di g

b2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^x - 1)^2 + \log(1 + x^4 - x^2) - \arctan x^3}{x^4}$

Ricordiamo che $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$

per cui $(e^x - 1)^2 = \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 + x^3 + \frac{7}{12}x^4 + o(x^4)$

Inoltre $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \rightarrow 0$, per cui

$$\begin{aligned} \log(1 + x^4 - x^2) &= -x^2 + x^4 - \frac{1}{2}(-x^2 + x^4)^2 + o(x^4) \\ &= -x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0; \end{aligned}$$

Infine $\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3)$ per $t \rightarrow 0$, da cui

$$\arctan x^3 = x^3 + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Ne segue

$$\begin{aligned} \frac{(e^x - 1)^2 + \log(1 + x^4 - x^2) - \arctan x^3}{x^4} &= \\ &= \frac{\cancel{x^2} + \cancel{x^3} + \frac{7}{12}x^4 + o(x^4) - \cancel{x^2} + \frac{x^4}{2} + o(x^4) - \cancel{x^3} + o(x^4)}{x^4} \\ &= \frac{\frac{13}{12}x^4 + o(x^4)}{x^4} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{13}{12}}, \end{aligned}$$

b3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-2} 3^n}{\pi^n} (x^2 - 1)^n$

Poniamo $t = (x^2 - 1)$, e studiamo la convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n^{-2} 3^n}{\pi^n}}_{a_n} t^n$.

Abbiamo $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{3^n}{\pi^n n^2}} = \frac{3}{\pi \sqrt[n]{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\pi}$.

Quindi il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-2} 3^n}{\pi^n} t^n$ è $r = \frac{\pi}{3}$; risulta che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-2} 3^n}{\pi^n} t^n$ è convergente $\forall t \in]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}[$.

Per $t = -\frac{\pi}{3}$, la serie risulta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, che è convergente essendo assolutamente convergente (o convergente grazie al criterio di Leibniz).

Per $t = \frac{\pi}{3}$, la serie risulta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, che è convergente. In conclusione, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-2} 3^n}{\pi^n} t^n$ è convergente per $t \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$. Quindi la serie data risulta convergente per x tale che $-\frac{\pi}{3} \leq x^2 - 1 \leq \frac{\pi}{3}$ e l'insieme di convergenza risulta $E = [-\sqrt{\frac{\pi}{3}+1}, \sqrt{\frac{\pi}{3}+1}]$. ■

b4) i) $\int (xe^x + \frac{1}{2x+4}) dx = xe^x - \int e^x dx + \frac{1}{2} \int \frac{2}{2x+4} dx$. Ne segue $F(x) = e^x(x-1) + \frac{1}{2} \log|2x+4| + c, c \in \mathbb{R}$. Ora $F(0) = 0 \Leftrightarrow$

$0 = -1 + \frac{1}{2} \log 4 + c$, ossia $c = 1 - \log 2$. Abbiamo che la primitiva ricercata è $F(x) = e^x(x-1) + \frac{1}{2} \log|2x+4| - \log 2 + 1$. □

ii) $\int_0^2 f(x) dx = \left[e^x(x-1) + \frac{1}{2} \log|2x+4| \right]_0^2 = (e^2 + \frac{1}{2} \log 8) - (-1 + \frac{1}{2} \log 4)$
 $= e^2 + 1 + \frac{1}{2} \log \frac{8}{4} = e^2 + 1 + \log \sqrt{2}$. ■

b5) $\int_0^{+\infty} \frac{x^3+1-|x^3-1|}{x^\alpha \arctan x} dx = \int_0^1 \frac{x^3+1+x^3-1}{x^\alpha \arctan x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^3+1-x^3+1}{x^\alpha \arctan x} dx$

Entrambe le funzioni integrande sono continue e positive nel loro dominio d'integrazione. Osserviamo che

• per $x \rightarrow 0^+$ $\frac{2x^3}{x^\alpha \arctan x} \sim \frac{2}{x^{\alpha+1-3}}$: poiché $\int_0^1 \frac{2}{x^{\alpha+1-3}} dx < +\infty \Leftrightarrow$

$\alpha-2 < 1$, per il criterio del confronto asintotico

$\int_0^1 \frac{2x^3}{x^\alpha \arctan x} dx < +\infty \Leftrightarrow \alpha < 3$.

•• per $x \rightarrow +\infty$, $\frac{2}{x^\alpha \arctan x} \sim \frac{2}{x^\alpha \frac{\pi}{2}}$. Poiché $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx < +\infty$

se e solo se $\alpha > 1$, per il criterio del confronto
asintotico $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^\alpha \arctan x} dx < +\infty \iff \alpha > 1$.

In definitiva, l'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{x^3+1-|x^3-1|}{x^\alpha \arctan x} dx < +\infty \iff \boxed{1 < \alpha < 3}$. 

b6) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. f si dice derivabile in x_0 se...

esiste finito $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.

□

ii) Teorema di Rolle: Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, derivabile su $]a, b[$ e t.c. $f(a) = f(b)$. Allora $\exists c \in]a, b[$ t.c. $f'(c) = 0$.

■

FILA (B)

$$21) f'(x) = [(\cos x + \arctan x) \log(1+3x)]' = \left[\left(-\sin x + \frac{1}{1+x^2} \right) \log(1+3x) + (\cos x + \arctan x) \frac{3}{1+3x} \right].$$

22) Basta imporre la continuità e derivabilità di f in $x_0=0$ (in tutti gli altri punti f è continua e derivabile qualunque. meno α e β):

$$f(x) \text{ è continua in } x_0=0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow 3 = 1 - 2\beta \Rightarrow \boxed{\beta = -1};$$

$$\text{Quindi poniamo } f(x) = \begin{cases} 2\alpha x + 3 & \text{se } x \leq 0 \\ \cos x + x + 2 & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Poiché f è continua in $x_0=0$, e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2\alpha = 2\alpha$ e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\sin x + 1) = 1, \quad f \text{ è derivabile in } x_0=0 \Leftrightarrow 2\alpha = 1, \text{ ossia } \boxed{\alpha = \frac{1}{2}}.$$

$$23) (f^{-1})'(\frac{\pi}{2} - 1) = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{[1 - \cos x]_{\frac{\pi}{2}}} = \boxed{1}.$$

$$24) f(x) = x \log(1-|x|) \quad \text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} : 1-|x| > 0\} = \boxed{]-1, 1[}.$$

$$25) f(x) = \sin 3x - e^x$$

$$= 3x + o(x^2) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -1 + 2x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

$$\text{Quindi } \boxed{P_2(x) = -1 + 2x - \frac{x^2}{2}} \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+3x) - xe^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x + o(x) - x + o(x)}{2x} = \boxed{1}.$$

$$27) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n^{4\alpha+2}} < +\infty \Leftrightarrow 4\alpha+2 > 1 \Rightarrow \boxed{\alpha > -\frac{1}{4}}.$$

$$28) y = F(0) + F'(0)(x-0) : \text{ ora } F(0)=0, \quad F'(x) \stackrel{\text{TFC}}{=} (3-x^2)e^{x^2} \quad \forall x$$

e quindi $F'(0) = 3$

$$\text{L'eq. della retta tg cercata è } \boxed{y = 3x}.$$

$$29) \int \left(\cos(x+1) - \frac{2x}{1+x^2} \right) dx = \boxed{\sin(x+1) - \log|1+x^2| + C, \quad C \in \mathbb{R}}.$$

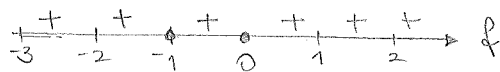
$$30) \int_2^6 \frac{2+\cos x}{(x-2)^{3\alpha}} dx < +\infty \Leftrightarrow 3\alpha < 1 \Rightarrow \boxed{\alpha < \frac{1}{3}}$$

b1) i)

$$f(x) = \frac{|x^2+x|}{x^2+1}$$

• $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

• segno di f : $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ e $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1, 0$



• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

$y = 1$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$ (per $x \rightarrow +\infty$).

• f è continua su tutto $\mathbb{R}$ essendo somma/composizione/rapporto di funzioni continue (e il denominatore non si annulla mai).

• Osserviamo che
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x}{x^2+1} & \text{se } x \leq -1 \text{ o } x \geq 0 \\ \frac{-x^2-x}{x^2+1} & \text{se } -1 < x < 0 \end{cases}$$

Si ottiene

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{(2x+1)(x^2+1) - (x^2+x)2x}{(x^2+1)^2} & \text{se } x < -1 \text{ o } x > 0 \\ \frac{(-2x-1)(x^2+1) - (-x^2-x)2x}{(x^2+1)^2} & \text{se } -1 < x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2} & \text{se } x < -1 \text{ o } x > 0 \\ \frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2} & \text{se } -1 < x < 0 \end{cases}$$

Notiamo che $\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = -\frac{1}{2} = f'_-(-1)$ $\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = \frac{1}{2} = f'_+(-1)$

$\Rightarrow x = -1$ pt. di non derivabilità di f
pt. angoloso.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -1 = f'_-(0)$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1 = f'_+(0)$

$\Rightarrow x = 0$ pt. di non derivabilità di f
pt. angoloso.

Infine

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \bullet) -x^2+2x+1=0$ con $x < -1$ o $x > 0$

$\hookrightarrow x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{-2} = 1 \pm \sqrt{2}$

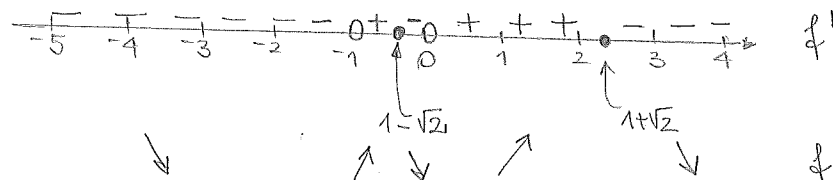
Poiché deve essere $x < -1$ o $x > 0$, solo $x = 1 + \sqrt{2}$ è accettabile.

Oppure ∞) $x^2 - 2x - 1 = 0$ con $-1 < x < 0$

$$\hookrightarrow x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

L'unica soluzione accettabile è $x = 1 - \sqrt{2}$.

Abbiamo così



$\Rightarrow x = 1 - \sqrt{2}$ è pt. di massimo loc. stretto per f

$$f(1 - \sqrt{2}) = \frac{|(1 - \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})|}{(1 - \sqrt{2})^2 + 1} = \frac{|4 - 3\sqrt{2}|}{4 - 2\sqrt{2}} \approx 0.2..$$

$\Rightarrow x = 1 + \sqrt{2}$ è pt. di massimo loc. stretto per f

$$f(1 + \sqrt{2}) = \frac{|(1 + \sqrt{2})^2 + 1 + \sqrt{2}|}{(1 + \sqrt{2})^2 + 1} = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}} (> 1)$$

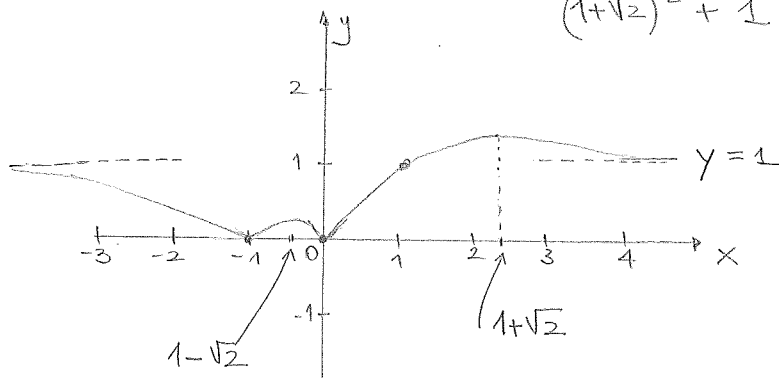


Grafico qualitativo di f

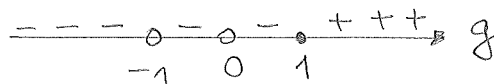
Oss. Si poteva anche studiare prima la

funzione $h(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}$ e poi considerare $f(x) = |h(x)|$.

ii) $\boxed{g(x) = \log(f(x))}$

• $\text{dom } g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

• Notiamo che $f(x) \geq 1$ solo per $x \geq 1$



• $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

$y = 0$ asintoto orizz. per g
per $x \rightarrow -\infty$ (per $x \rightarrow +\infty$);

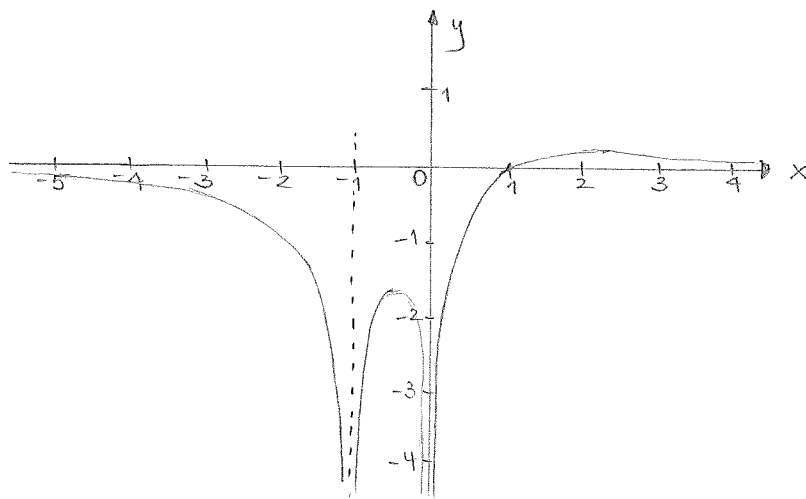
$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty$

$x = -1$ asintoto verticale per g
(da destra e da sinistra);

$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$

$x = 0$ asintoto verticale per g
(da destra e da sinistra).

La funzione logaritmo è una funzione strettamente crescente, e conserva quindi la monotonia della funzione $f(x)$ e otteniamo così facilmente il seguente grafico qualitativo di g :



b2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^x - 1)^2 - 2 \log(1 + \frac{x^2}{2} - x^4) - \sin x^3}{x^4}$.

Si ha $(e^x - 1)^2 = x^2 + x^3 + \frac{7}{12}x^4 + o(x^4)$ (vedi Es. 62) Fila A).

Inoltre da $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \rightarrow 0$, segue

$$\log(1 + \frac{x^2}{2} - x^4) = \frac{x^2}{2} - x^4 - \frac{1}{2}(\frac{x^2}{2} - x^4)^2 + o(x^4) \text{ per } x \rightarrow 0;$$

Infine $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$ per $t \rightarrow 0$, da cui $\sin x^3 = x^3 + o(x^4)$ per $x \rightarrow 0$

Ne segue

$$\begin{aligned} \frac{(e^x - 1)^2 - 2 \log(1 + \frac{x^2}{2} - x^4) - \sin x^3}{x^4} &= \\ &= \frac{\cancel{x^2} + \cancel{x^3} + \frac{7}{12}x^4 + o(x^4) - \cancel{x^2} + 2x^4 + \frac{x^4}{4} + o(x^4) - \cancel{x^3} + o(x^4)}{x^4} \\ &= \frac{\frac{17}{6}x^4 + o(x^4)}{x^4} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{17}{6}}. \end{aligned}$$

b3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-1} 2^n}{e^n} (x^3 - 1)^n$.

Poniamo $t = x^3 - 1$, e studiamo la convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-1} 2^n}{e^n} t^n$.

Abbiamo $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^n}{e^n n}} = \frac{2}{e \sqrt[n]{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{e}$.

Quindi il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-1} 2^n}{e^n} t^n$ è $r = \frac{e}{2}$;

risulta che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-1} 2^n}{e^n} t^n$ è convergente $\forall t \in]-\frac{e}{2}, \frac{e}{2}[$.

Per $t = -\frac{e}{2}$, la serie risulta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ che è convergente grazie al criterio di Leibniz.

Per $t = \frac{e}{2}$, la serie risulta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ che è divergente (serie armonica).

In conclusione, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-1} 2^n}{e^n} t^n$ è convergente $\forall t \in]-\frac{e}{2}, \frac{e}{2}[$.

Quindi la serie data risulta convergente per tutti gli x tali che

$$x^3 - 1 \in]-\frac{e}{2}, \frac{e}{2}[, \text{ ossia } x^3 \in]-\frac{e}{2} + 1, \frac{e}{2} + 1[.$$

L'insieme di convergenza della serie data risulta $E = \left[\sqrt[3]{-\frac{e}{2} + 1}, \sqrt[3]{\frac{e}{2} + 1} \right]$.

$$b4) i) \int (x \sin x + \frac{1}{\sqrt{x+1}}) dx = -x \cos x + \int \cos x dx + \int \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$$

Si ha $F(x) = -x \cos x + \sin x + 2\sqrt{x+1} + c$, $c \in \mathbb{R}$. Ora $F(0) = 0$

$\Leftrightarrow 0 = 2 + c$, ossia $c = -2$. Otteniamo che la primitiva cercata è

$$F(x) = -x \cos x + \sin x + 2\sqrt{x+1} - 2.$$

$$ii) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \left[-x \cos x + \sin x + 2\sqrt{x+1} - 2 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = (1 + 2\sqrt{\frac{\pi}{2} + 1} - 2) - (2 - 2) = 2\sqrt{\frac{\pi}{2} + 1} - 1.$$

$$b5) \int_0^{+\infty} \frac{|x^2 - 1| - x^2 - 1}{x^\beta \arctan \sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{-x^2 + 1 - x^2 - 1}{x^\beta \arctan \sqrt{x}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2 - 1}{x^\beta \arctan \sqrt{x}} dx = - \int_0^1 \frac{2x^2}{x^\beta \arctan \sqrt{x}} dx - \int_1^{+\infty} \frac{2}{x^\beta \arctan \sqrt{x}} dx.$$

Entrambe le funzioni integrande sono continue e positive nel loro dominio d'integrazione. Osserviamo che,

• per $x \rightarrow 0^+$ $\frac{2x^2}{x^\beta \arctan \sqrt{x}} \sim \frac{2}{x^{\beta-2+1/2}}$: poiché $\int_0^1 \frac{2}{x^{\beta-2+1/2}} dx < +\infty$

$\Leftrightarrow \beta - \frac{3}{2} < 1$, per il criterio del confronto asintotico $\int_0^1 \frac{2x^2}{x^\beta \arctan \sqrt{x}} dx < +\infty \Leftrightarrow \beta < \frac{5}{2}$.

•• per $x \rightarrow +\infty$ $\frac{2}{x^\beta \operatorname{arctg} \sqrt{x}} \sim \frac{2}{x^\beta \cdot \frac{\pi}{2}}$. Poiché $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta} dx < +\infty$ se e solo se $\beta > 1$, per il criterio del confronto asintotico $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^\beta \operatorname{arctg} \sqrt{x}} dx < +\infty \Leftrightarrow \beta > 1$.

In conclusione, l'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{|x^2-1|-x^2-1}{x^\beta \operatorname{arctg} \sqrt{x}} dx < +\infty \Leftrightarrow \boxed{1 < \beta < \frac{5}{2}}$. ■

b6) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, e $x_0 \in \mathbb{R}$. f si dice continua in x_0 se ...

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

oppure equiv. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. □

ii) Teorema della media integrale: sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, allora $\exists c \in [a, b] : \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$. ■