

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA | | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

A

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI INGEGNERIA E SCIENZA DELL'INFORMAZIONE

CDL IN INFORMATICA - CDL IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE E DELLE COMUNICAZIONI

CDL IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE E ORGANIZZAZIONE D'IMPRESA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1

A.A. 2015-2016 — TRENTO, 9 GIUGNO 2016

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.

IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA. È OBBLIGATORIO RIPORTARE LE RISPOSTE DEI PRIMI 10 ESERCIZI SUL FOGLIO PRESTAMPATO.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Non usate il colore rosso.

a1) Sia $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n+1} : n \geq 1 \right\}$. Determinate $\inf A$ e $\sup A$.

Risposta:

a2) Sia $z = 2 + i$. Determinate $\operatorname{Re}(|z|^2 - 2z)$.

Risposta:

a3) Individuate il tipo di monotonia della successione $a_n = \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

Risposta:

a4) Calcolate $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \log\left(1 + \frac{2}{n}\right)$.

Risposta:

a5) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} |\sin x| & \text{se } x \leq 0 \\ \arctan x & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Determinate $\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ e $\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x)$, e dite se sono minimo e/o massimo, rispettivamente.

Risposta:

a6) Dite per quali valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ risulta continua e derivabile in tutto \mathbb{R} la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^x - 2 & \text{se } x \leq 0 \\ 3 \sin x + \beta & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Risposta:

a7) Determinate $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$.

Risposta:

a8) Calcolate la derivata seconda della funzione $F(x) = \int_0^{2x} e^{t^2} \, dt$.

Risposta:

a9) Dite per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta convergente $\int_0^2 \frac{1}{x^\alpha (2-x)^{\frac{1}{2}-\alpha}} \, dx$.

Risposta:

a10) Determinate l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale $y' + 3x = 0$.

Risposta:

b1) i) Risolvete in \mathbb{C} l'equazione

$$\operatorname{Im}(z\bar{z} + \frac{1}{z}) = \alpha$$

per $\alpha = 0$ e per $\alpha = 1$.

ii) Rappresentate nel piano di Gauss l'insieme delle soluzioni trovate nel punto i).

b2) Determinate, al variare di $\beta > 0$, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x^2 - (\sin x)^2}{\log(1 + x^\beta)}.$$

b3) i) Studiate (dominio, simmetrie, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità, punti critici e loro natura, monotonia) la funzione

$$f(x) = \frac{|x - 1|}{x^2 - 2x - 3}$$

e tracciatene un grafico qualitativo.

ii) Determinate $\int \frac{x - 1}{x^2 - 2x - 3} dx$.

iii) Rappresentate il grafico qualitativo della funzione $g(x) = e^{f(x)}$.

b4) i) Determinate il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)^n x^n.$$

ii) Determinate il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie (è facoltativo lo studio negli estremi)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{2} + 1)^n x^n.$$

b5) Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - (2 + \frac{1}{x})y = 0 \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

b6) i) Sia $f : A \rightarrow B$ una funzione. f si dice *iniettiva* se ...

ii) Dimostrate che $\sqrt{2}$ è *irrazionale*.

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA | | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

B

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI INGEGNERIA E SCIENZA DELL'INFORMAZIONE

CDL IN INFORMATICA - CDL IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE E DELLE COMUNICAZIONI

CDL IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE E ORGANIZZAZIONE D'IMPRESA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1

A.A. 2015-2016 — TRENTO, 9 GIUGNO 2016

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.

IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA. È OBBLIGATORIO RIPORTARE LE RISPOSTE DEI PRIMI 10 ESERCIZI SUL FOGLIO PRESTAMPATO.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Non usate il colore rosso.

a1) Sia $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} : n \geq 1 \right\}$. Determinate $\inf A$ e $\sup A$.

Risposta:

a2) Sia $z = 2 + i$. Determinate $\operatorname{Im}(z + i|z|^2)$.

Risposta:

a3) Individuate il tipo di monotonia della successione $a_n = \cos\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

Risposta:

a4) Calcolate $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \log\left(1 - \frac{3}{n}\right)$.

Risposta:

a5) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \arctan x & \text{se } x \leq 0 \\ -|\sin x| & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Determinate $\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ e $\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x)$, e dite se sono minimo e/o massimo, rispettivamente.

Risposta:

a6) Dite per quali valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ risulta continua e derivabile in tutto \mathbb{R} la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + \alpha & \text{se } x \leq 0 \\ \beta e^{-x} + 4 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Risposta:

a7) Determinate $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$.

Risposta:

a8) Calcolate la derivata seconda della funzione $F(x) = \int_0^{3x} e^{t^2} \, dt$.

Risposta:

a9) Dite per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta convergente $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha (1-x)^{\frac{3}{2}-\alpha}} \, dx$.

Risposta:

a10) Determinate l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale $y' - 5x = 0$.

Risposta:

b1) i) Risolvete in \mathbb{C} l'equazione

$$\operatorname{Im}(z\bar{z} - \frac{i}{z}) = \alpha$$

per $\alpha = 0$ e per $\alpha = 1$.

ii) Rappresentate nel piano di Gauss l'insieme delle soluzioni trovate nel punto i).

b2) Determinate, al variare di $\beta > 0$, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x^\beta}{(\sin x)^2 - \sin x^2}.$$

b3) i) Studiate (dominio, simmetrie, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità, punti critici e loro natura, monotonia) la funzione

$$f(x) = \frac{|x + 2|}{x^2 + 2x - 3}$$

e tracciatene un grafico qualitativo.

ii) Determinate $\int \frac{x + 2}{x^2 + 2x - 3} dx$.

iii) Rappresentate il grafico qualitativo della funzione $g(x) = e^{f(x)}$.

b4) i) Determinate il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{3} - 1)^n x^n$$

ii) Determinate il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie (è facoltativo lo studio negli estremi)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{3} + 1)^n x^n.$$

b5) Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - (1 - \frac{1}{x})y = 0 \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

b6) i) Sia $f : A \rightarrow B$ una funzione. f si dice *suriettiva* se ...

ii) Enunciate e dimostrate la formula del prodotto di due numeri complessi in forma trigonometrica.