

Serie di Fourier

2

Serie di Fourier è una serie di funzioni del tipo

$$(*) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

con $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ (oppure $\mathbb{C}$) assegnati, $x \in \mathbb{R}$.

Osservazioni preliminari semplici

(1) Periodicità: $\cos nx, \sin nx$ sono 2π -periodiche (minimoperiodo)

Quindi: $\Rightarrow$ se la serie converge in un punto $\bar{x}$, convergerà con la stessa somma anche in $\bar{x} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Ne segue che la somma di una serie di Fourier come (*) è una funzione periodica di periodo 2π . $\square$

(2) Cond. suff. per la convergenza: una semplice cond. suff.

di convergenza per (*) è che le serie numeriche $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ siano convergenti.

In tal caso, anzi, essendo

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n| \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

per il criterio di Weierstraß (M-Test), la serie (*)

risulta assolutamente e uniformemente convergente ⁽¹⁾

su tutto $\mathbb{R}$. La sua somma è allora una funzione continua su $\mathbb{R}$. $\square$

⁽¹⁾ Una $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ di funz. è absolut. convergente se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ è puntualmente convergente su $\mathbb{R}$ (cioè la succ. delle somme parziali $S_n(x)$ converge pt). La serie $\sum_n f_n(x)$ converge uniform. su $\mathbb{R}$, se $S_n(x)$ è uniform. convergente.

③ Relazione tra i coefficienti a_n, b_n e la somma della serie:

Ammettiamo, per intanto, che la serie $(*)$ sia uniformemente convergente su $\mathbb{R}$ e indichiamo con $f(x)$ la sua somma:

$$(**) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Moltiplichiamo entrambi i membri dell'eq. $(**)$ per $\cos mx$ ($m \in \mathbb{N}$) e integriamo su $[-\pi, \pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \right)$$

Essendo la serie uniformemente convergente, possiamo integrare termine a termine. Ricordando $\blacksquare$ si ha

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \neq 0 \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx &= 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx &= \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = a_m \quad m=0, 1, 2, \dots \quad (**')$$

Analog. moltiplicando entrambi i membri di $(**)$ per $\sin mx$ e integrando su $[-\pi, \pi]$ si ha

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx = b_m \quad m=1, 2, \dots \quad (**'')$$

$\blacksquare$ Basta integrare su $[-\pi, \pi]$ le identità di Wiener (fare prostaferesi), valide $\forall m, n \in \mathbb{N}$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(n-m)x + \cos(n+m)x]$$

$$\cos mx \sin nx = \frac{1}{2} [\sin(n-m)x + \sin(n+m)x]$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x]$$

□

Osserviamo che i coeff. di una serie di Fourier sono legati alla somma della serie da relazioni integrali, mentre i coeff. di una serie di potenze sono legati alla somma da relazioni differenziali.⁽¹⁾

□

④ Periodi diversi da 2π :

Possiamo considerare serie di Fourier costruite con funzioni del tipo

$$\cos\left(\frac{2\pi n}{T} y\right), \quad \sin\left(\frac{2\pi n}{T} y\right) \quad T > 0,$$

che sono tutte funzioni T -periodiche. Se la serie converge, anche la sua somma $g(y)$ è T -periodica. Le formule $(**)$, $(**)'$, $(**)"$ sarebbero allora sostituite dalle seguenti:

$$(***) \quad g(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} y\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} y\right) \right)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(y) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} y\right) dy \quad (***)'$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(y) \sin\left(\frac{2\pi n}{T} y\right) dy \quad (***)"$$

Si passa dalle formule $(**)$, ... , a queste sopra con la sostituzione di variabili

$$x = \frac{2\pi}{T} y \quad f(x) = f\left(\frac{2\pi}{T} y\right) = g(y).$$

□

$$^{(1)} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

b In molte applicazioni ha notevole interesse il seguente problema (in un certo senso inverso a quello di studiare la convergenza di una assegnata serie trigonometrica):

- data una funzione g , 2π -periodica (o T -periodica) in $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) stabilire se esiste una serie trigonometrica di cui g è la somma.

Si tratta cioè di dare condizioni su g affinché esistano delle costanti a_0, a_n, b_n tale che la serie $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} y\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} y\right)$ non solo sia convergente, ma converga proprio a $g(x)$.

Quando ciò accade, si dice che g è sviluppabile in serie di Fourier. Se inoltre la serie è uniform. convergente, i coeff. della serie trigonometrica sono individuati in modo univoco da g (sono dati da $(***)'$, $(***)''$), il che autorizza a definire tale serie come la serie di Fourier.

Più precisamente

Def. Data una funzione g T -periodica, se gli integrali

$$\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(y) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} y\right) dy, \quad \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(y) \sin\left(\frac{2\pi n}{T} y\right) dy$$

esistono, anche in senso generalizzato⁽¹⁾, i numeri

$$(■) \quad a_n = \boxed{a_n(g)} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(y) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} y\right) dy$$

$$(■) \quad b_n = \boxed{b_n(g)} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(y) \sin\left(\frac{2\pi n}{T} y\right) dy$$

si dicono coeff. (costanti) di Fourier di g (rispetto al sistema

(1) L'ambiente naturale sono le funzioni T -periodiche (q.o.) e integrabili (nel senso di Lebesgue) su $J =]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$ indicate spesso con $L^1_{\#}$.

delle funzioni trigonometriche). La serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} y\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} y\right) \right)$$

con i coefficienti dati da (■) si dice serie di Fourier associata ad g , e si scrive

$$(■)' \quad g(y) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} y\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} y\right) \right).$$

Una precisazione essenziale: nella (■)' non si è usato il segno di uguaglianza, ma il simbolo $\sim$, il cui unico significato è:

"i coefficienti a_n, b_n nella (■)' sono legati a g dalle (■)"

Ma deve essere ben chiaro che ciò non sottintende alcuna affermazione sulla (eventuale) somma della serie. Infatti,

- non è detto che la serie che compare in (■)' sia convergente in $]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$;
- anche se la serie converge, non è detto che la sua somma sia $g(y)$.

□

OSS. (sul calcolo dei coefficienti; funzioni pari e dispari):

Sia g T -periodica, integrabile su $]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$ ⁽¹⁾. Allora

(i) $\int_a^{a+T} g(x) dx = \int_0^T g(x) dx \quad \forall a \in \mathbb{R}$

(ii) Se g è pari, allora $b_n = b_n(g) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 Se g è dispari, allora $a_n = a_n(g) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(1) $g \in L^1_{\#}$ (per esempio); o Riemann-integrabile, o Riemann-integrabile in senso generalizzato.

Dim. (i) Infatti, è ovvio che g è integrabile su ogni intervallo limitato (essendo periodica e integrabile su $]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$). Abbiamo

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} g(x) dx &= \int_a^0 g(x) dx + \int_0^T g(x) dx + \int_T^{a+T} g(x) dx \\ &= \int_a^0 g(x) dx + \int_0^T g(x) dx + \int_0^a g(t+T) dt \\ &\quad \text{ultimo integrale coord. } x = t+T \\ &\stackrel{g \text{ è } T\text{-periodica}}{=} \int_a^0 g(x) dx + \int_0^T g(x) dx + \int_0^a g(t) dt = \int_0^T g(x) dx \quad \square \\ &\quad g(t+T) = g(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

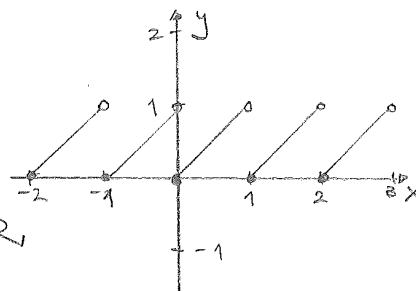
(ii) $b_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(y) \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi n}{T} y\right)}_{\substack{\text{dispari se } g \text{ pari} \\ \text{pari se } g \text{ dispari}}} dy = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, e analog per a_n se g è dispari. ■

Nota: dall'OSS.(ii) precedente si ha perciò che la serie di Fourier associata ad una funzione pari è una serie di soli coseni, quella associata a una funzione dispari è una serie di soli seni.

ESEMPLI:

① $f(x) = x - [x]$ $[x] =$ parte intera di x
(mantissa di x)

è una funzione 1-periodica su $\mathbb{R}$



I coeff. di Fourier sono

$$a_0 = \frac{2}{1} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \frac{2}{1} \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 x dx = \cancel{2} \cancel{x^2} \Big|_0^1 = \underline{1}$$

OSS. Sopra

$$a_n = \frac{2}{1} \int_0^1 f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{1} x\right) dx = 2 \int_0^1 x \cos(2\pi n x) dx =$$

$$= 2 \left[\cancel{x \frac{\sin(2\pi n x)}{2\pi n}} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(2\pi n x)}{2\pi n} dx \right] = \frac{\cos(2\pi n x)}{2\pi^2 n^2} \Big|_0^1 = 0 \quad \forall n=1,2,\dots$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{1} \int_0^1 f(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{1}\right) dx = 2 \int_0^1 x \sin(2\pi n x) dx \\
 &= 2 \left[-x \frac{\cos(2\pi n x)}{2\pi n} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(2\pi n x)}{2\pi n} dx \right] = \\
 &= -\frac{1}{\pi n} + 2 \frac{\sin(2\pi n x)}{4\pi^2 n^2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{\pi n}
 \end{aligned}$$

Sarremo quindi

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(2\pi n x) \quad (\#)$$

Osserviamo che, per $x=0$, il membro destro in $(\#)$ vale $\frac{1}{2}$, mentre il primo membro vale $f(0)=0$! Non possiamo quindi saltare = al posto di $\sim$ nella $(\#)$ (almeno per $x=0$; ma nota anche per tutti gli $x=k$ con $k \in \mathbb{Z}$!)

(2) $f(x) = x^2$ su $[-\pi, \pi]$, e poi esteso su tutto $\mathbb{R}$ in modo periodico.

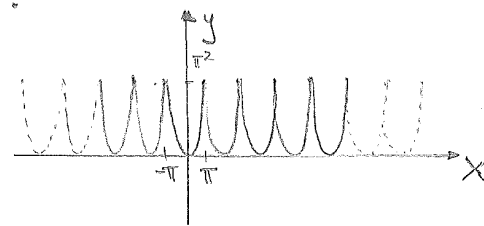
f è pari su $[-\pi, \pi]$; quindi

$$b_n = 0.$$

I coeff. di Fourier sono dunque

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{3} \pi^2$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left[x^2 \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} x \frac{\sin nx}{n} dx \right] \\
 &= -\frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} x \frac{\sin nx}{n} dx = \frac{4}{\pi} x \frac{\cos nx}{n^2} \Big|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n^2} dx \\
 &= \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos n\pi}{n^2} \right] = \frac{4(-1)^n}{n^2} \quad n=1, 2, \dots
 \end{aligned}$$



Possiamo quindi scrivere

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

Osserviamo che, poiché $|a_n| \leq \frac{4}{n^2}$ e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente, la serie di Fourier considerata è assolutamente e uniformemente convergente su $\mathbb{R}$. $\square$

oss. La funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$, π -periodica, non ammette coeff. di Fourier; gli integrali (generalizzati)

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{tg} x \cos(2nx) dx, \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{tg} x \sin(2nx) dx$$

non sono tutti convergenti. $\square$

Convergenza delle serie di Fourier

Veniamo ora alla questione fondamentale posta a pag. F4- :
data una funzione 2π -periodica (ovviamente il discorso si
 ripete analog. per funzioni T -periodiche in generale), dotata
di coeff. di Fourier, sotto quali condizioni l'assoluta
serie converge e con quale somma?

Evidentemente, per rispondere a questa domanda, dobbiamo
 innanzitutto precisare quale tipo di convergenza si intende alla
 serie data, se puntuale o uniforme o di un'altro
 tipo (convergenza in media quadratica, ossia $L^2(-\pi, \pi)$!!)

Convergenza puntuale

Ricordiamo che

- $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua a tratti se è continua in $[a, b]$ bene o più in un nr. finito di pt. $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$ nei quali esistono finiti i limiti destro e sinistro^(*) scriveremo

$$\lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x) = f(x_i^-) \quad i = 1, \dots, n.$$

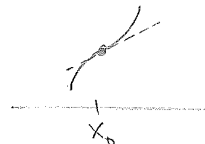
$$\lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x) = f(x_i^+)$$

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua a tratti se è continua a tratti in ogni intervallo limitato.

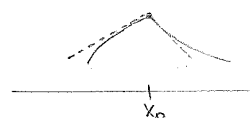
Esempio: $f(x) = x - [x]$ è una funzione continua a tratti su $\mathbb{R}$.

Def: Una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ soddisfa, nel pt. $x_0 \in]a, b[$ la condizione (D) (-Dirichlet) se:

- (i) è derivabile in x_0 , oppure



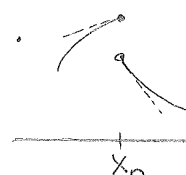
- (ii) è continua in x_0 e dotata di derivata destra $f'_+(x_0)$ e sinistra $f'_-(x_0)$, oppure



- (iii) ha una discontinuità di 1ª specie in x_0 , ed esistono finiti i limiti

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0}$$



^(*) solo limite destro, o sinistro, se il pt. è un estremo dell'intervallo.

Abbiamo il seguente risultato di convergenza

i coeff. di Fourier
quindi sono

Teorema : Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodica, continua a tratti.

Allora la serie di Fourier associata ad f converge in ogni pt. $x \in \mathbb{R}$

in cui è soddisfatta la condizione (D); la sua somma $S(x)$ è

dato da

$$S(x) = \frac{1}{2} [f(x^-) + f(x^+)].$$

In particolare, se x è un pt. di continuità per la f , la serie converge con somma $f(x)$.

Vedi Es. (1)
(anche se caso
1-periodico!)

pag. - F6 -



$$f(x) = x - [x]$$

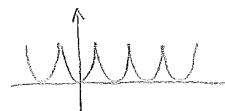
$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(2\pi n x)$$

$$S(k) = \frac{1}{2}, \text{ per } k \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

In $x = k \in \mathbb{Z}$, f soddisfa (iii) nella cond. (D).

Vedi Es. (2)

pag. - F7 -



$$f(x) = x^2 \text{ su } [-\pi, \pi]$$

In $x = k\pi$ f soddisfa (ii) nella cond. (D). $\square$

OSS. IMPORTANTE : La sola continuità di una funzione 2π -periodica non è sufficiente a garantire la sviluppabilità in serie di Fourier.

Du Bois Reymond (1873)

Convergenza uniforme

Teorema : Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodica, $\mathcal{C}^1$ a tratti. Allora la serie di Fourier associata ad f converge assolutamente e uniformemente in $\mathbb{R}$.

$$\mathcal{C}_{\text{tratti}}^1([a,b]) = \{u \in \mathcal{C}([a,b]) : \exists \text{ nr. finito pt. } a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b; u \in \mathcal{C}^1([x_i, x_{i+1}]) \text{ ed } \exists \lim_{x \rightarrow x_i^+} u'(x) \in \mathbb{R}, \exists \lim_{x \rightarrow x_i^-} u'(x) \in \mathbb{R}\}.$$

Oss. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodica, $\mathcal{C}^1$ a tratti

Allora la funzione $f'(x)$ è definita in $[-\pi, \pi]$ eccetto che in un nr. finito di pt, dove possiamo convenzionalmente porla uguale a 0.

Quindi $f'(x)$ è quindi una funzione continua a tratti e 2π -periodica.

Quindi siano a_n' , b_n' i suoi coeff. di Fourier

$$a_n' = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx \, dx \quad b_n' = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx.$$

Integrando per parti su ciascuno dei sottointervalli, dove $f'(x)$ è continua, si ha dalle formule viste per $f(x)$,

$$a_n' = n b_n, \quad b_n' = -n a_n$$

dove a_n, b_n sono i coeff. di Fourier di f .

Convergenza delle serie di Fourier in $L^2(-\pi, \pi)$

Abbiamo visto sopra qualche aspetto della teoria "classica" delle serie di Fourier; l'aggettivo "classica" sta ad indicare che il pbn. di studiare la moltiplicabilità in serie di Fourier di una assegnata funzione 2π -periodica f è stato impostato nell'ambito della convergenza puntuale. Abbiamo già osservato però che nella definizione di serie di Fourier (vedi Def. pag. F4-) serve solo l'integrabilità (secondo Lebesgue) di f in $]-\pi, \pi[$. Sembra quindi ragionevole chiedersi se i risultati di convergenza pt. visti nel caso di funzioni "regolari a tratti" possano essere estesi, in qualche forma opportuna, a classi più generali di funzioni.

Quella naturale sembrerebbe ovviamente lo spazio $L^1(-\pi, \pi)$ delle (classi di equivalenza di) funzioni (lebesgue) integrabili su $]-\pi, \pi[$ (che pensandole prolungate per periodicità, possiamo identificare ad elementi di $L^1_{\#}$). La convergenza di tipo puntuale ovunque non è certo naturale in questo ambito (d'altra parte non è garantita nemmeno per funz. 2π -periodiche e continue). Si può pensare di utilizzare di usare la convergenza puntuale, ma quasi ovunque. Ma Kolmogorov ha dim. che.

$\exists$ una funzione in $L^1_{\#}$ la cui serie di Fourier non converge in nessun punto.

Kolmogorov (1926)

Ciò suggerisce di sostituire lo spazio $L^1(-\pi, \pi)$ con qualche altro spazio meno ampio. Sarà lo spazio $L^2(-\pi, \pi)$.

$L^2(a, b)$ insieme delle classi di equivalenza (modulo la relazione di uguaglianza q.o.) delle funzioni $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ integrabili (lebesgue) che verificano $\int_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty$.

Se $f, g \in L^2(a, b) \Rightarrow fg$ è integrabile su $]a, b[$. Inoltre

• $(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx$ definisce un prodotto scalare

e

• $\|f\|_{L^2} = \sqrt{(f, f)}$ una norma in $L^2(a, b)$

Inoltre $(f_n)_n \subset L^2(a, b)$ tende (fortemente) in L^2 (o in media quadratica) ad f in L^2 se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{L^2} = 0$.

- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge (fortemente) in L^2 (o in media quadratica) ad s se la succ. delle somme parziali $(S_n)_n$ tende a s in L^2 .

In $L^2(-\pi, \pi)$ conviene introdurre il seguente sistema di funzioni (nen):

$$(*) \quad \boxed{e_0(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad e_{2n}(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \quad e_{2n-1}(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx}$$

Da ■ 2 pag. -F2- segue subito che $(e_n)_n$ è un sistema ortonormale in $L^2(-\pi, \pi)$, cioè

$$(e_n, e_m) = \delta_{n,m}$$

$$n, m = 0, 1, 2, \dots$$

($\delta_{n,m}$ = delta di Kronecker)

Risulta inoltre

$$\boxed{f(x) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} (f, e_n) e_n(x)}$$

dove i numeri (f, e_n) , che si dicono i coeff. di Fourier di f rispetto al sistema ortonormale $(e_n)_n$ sono legati alle costanti di Fourier dalle relazioni

$$\boxed{\begin{aligned} (f, e_0) &= a_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ (f, e_{2n}) &= a_n \sqrt{\pi} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ (f, e_{2n-1}) &= b_n \sqrt{\pi} \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} \text{per es: } (f, e_0) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx}_{a_0} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} a_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f, e_{2n}) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx}_{a_n} \\ &= \sqrt{\pi} a_n \end{aligned}$$

Teorema

- Per ogni $f \in L^2(-\pi, \pi)$, la serie di Fourier di f rispetto a $(e_n)_n$ ^(*)
converge in L^2 proprio ad f .

Inoltre, questo è equiv. al fatto che

- Per ogni $f \in L^2(-\pi, \pi)$ vale l'identità di Parseval

$$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, e_n)|^2 \quad \left(= \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right)$$

(*) cioè il sistema ortonormale $(e_n)_n$ è completo in $L^2(-\pi, \pi)$.

Oss. $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (f, e_n) e_n(x)$

ci dà una rappresentazione della funzione f (intesa come punto o vettore di uno spazio vettoriale $(L^2(-\pi, \pi))$ dotato del prodotto scalare $\int_{-\pi}^{\pi} fg dx$) come combinazione lineare (infinita) di vettori ortogonali, esattamente come in $\mathbb{R}^n$ un vettore può essere rappresentato come combinazione lineare (finita) dei vettori della base canonica $e^1, e^2, \dots, e^n$.

Da questo pt. di vista i coeff. di Fourier (f, e_n) sono, per la funzione f , quello che, per un vettore o pt. di $\mathbb{R}^n$, sono le sue coordinate cartesiane ortogonali.