

Eq. diff. del tipo $F(y, y') = 0$

Consideriamo un'eq. diff. della forma $F(y, y') = 0$.

Sia $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ una riduzione. Notiamo che, al variare di $x \in I$,

$$1) \quad x \mapsto (u(x), u'(x))$$

fornisce una rappresentazione parametrica di un arco $\mathcal{C}$ della curva di eq.

$F = 0$ nel piano yy' . Si nota una rappresentazione parametrica

$$2) \quad \begin{cases} y = A(s) \\ y' = B(s) \end{cases}$$

di tale arco $\mathcal{C}$. Supponiamo che s e $x(s)$ descrivano lo stesso pt. della curva nelle due rappresentazioni 1) e 2), cioè

$$3) \quad \begin{cases} u(x(s)) = A(s) \\ u'(x(s)) = B(s) \end{cases}.$$

Cerchiamo di individuare una rappresentazione parametrica del grafico di u nella forma

$$\begin{cases} X = x(s) \\ Y = y(s) \end{cases}.$$

Chiaramente deve essere

$$y(s) = u(x(s))$$

e quindi

$$\frac{dy}{ds} = u'(x(s)) x'(s).$$

Da 2), 3) si ottiene allora

$$A'(s) = B(s) x'(s)$$

quindi, ricavando $x'(s)$ e integrando

$$\begin{cases} x = x(s) = \int \frac{A'(s)}{B(s)} ds \\ y = y(s) = A(s) \end{cases}.$$

-57**

$$u(1+u'^2) = \frac{1}{c^2}$$

Si tratta di un'eq. della forma $F(u, u') = 0$.

(basta scrivere $\underline{u(1+u'^2) - \frac{1}{c^2} = 0}$)

Seguiamo il metodo di risoluzione delineato pag. 57*

Una rappresentazione parametrica della curva

$$u(1+u'^2) = \frac{1}{c^2}$$

è

$$\begin{cases} u = \frac{1}{c^2(1+\tan^2 \frac{s}{2})} = \frac{1}{2c^2} (1+\cos s) \doteq A(s) \\ u' = \tan \frac{s}{2} \doteq B(s) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{1+\cos s}{2} &= \frac{1+\cos(\frac{s}{2}+\frac{s}{2})}{2} \\ &= \frac{1+\cos^2 \frac{s}{2} - \sin^2 \frac{s}{2}}{2} = \\ &= \cos^2 \frac{s}{2} = \frac{1}{1+\tan^2 \frac{s}{2}} \end{aligned}$$

Pertanto

$$x(s) = \int \frac{A'(s)}{B(s)} ds =$$

$$= \int \frac{-\frac{1}{2c^2} \sin s}{\tan \frac{s}{2}} ds = \int \frac{-\frac{1}{2c^2} \cancel{2} \sin \frac{s}{2} \cos \frac{s}{2}}{\tan \frac{s}{2}} ds$$

$$= -\frac{1}{c^2} \int \cos^2 \frac{s}{2} ds = -\frac{1}{2c^2} (s + \sin s) + K \quad \begin{matrix} K \text{ costante} \\ \text{arbitraria} \end{matrix}$$

$$y(s) = \frac{1}{2c^2} (1 + \cos s)$$

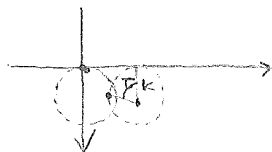
$$\int \cos^2 \frac{s}{2} ds = \frac{1}{2} (s + \sin s)$$

o anche

$$\begin{cases} x(s) = K - k(s + \sin s) \\ y(s) = k(1 + \cos s) \end{cases}$$

con $K \in \mathbb{R}$
 $k > 0$ arbitraria.

Si tratta delle eq. parametriche di una cicloide, cioè del luogo delle posizioni assunti da un punto fissato su una circonferenza di raggio k quando viene fatta rotolare su una retta "da sotto".



Le coordinate del punto dopo la rotazione di

-57***

Un angolo τ come in figura sono date da

$$\begin{cases} x(\tau) = k\tau - k\sin\tau = k(\tau - \sin\tau) \\ y(\tau) = k - k\cos\tau = k(1 - \cos\tau) \end{cases};$$

Il cambiamento di parametro $\tau = \pi - s$ dà (a meno di una traslazione)

$$\begin{cases} x = -k(s + \sin s) \\ y = k(1 + \cos s) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x(s) &= k(\pi - s) - k\sin(\pi - s) \\ &= k\pi - ks - k\overset{1}{\cos\pi} \overset{-\sin s}{\sin(-s)} \\ &= k\pi - k(s + \sin s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(s) &= k - k\cos(\pi - s) \\ &= k - k\cos\pi \cos(-s) \\ &= k + k\cos s \end{aligned}$$