Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione

CdL in Informatica, Ingegneria dell'informazione e delle comunicazioni e Ingegneria dell'informazione e organizzazione d'impresa

a.a. 2016-17 - PIAZZA1 - *"Estremo inferiore/superiore - Induzione - Numeri Complessi"*

1.1) Sia $A = \{x_n = \dfrac{n-1}{3n} + \dfrac{2}{3} : n \in \mathbf{N}\,, n \geq 1\}$.

a) Verificate che l'insieme A è limitato.

b) Determinate, usando la caratterizzazione (e non via teorema di esistenza del limite per funzioni monotone), l'estremo superiore ed inferiore di A. Dite se sono massimo e minimo, rispettivamente.

1.2) Sia $B = \{x \in \mathbf{R} \setminus \{-2\} : \left|\dfrac{x^2-1}{x+2}\right| \leq 1\}$. Determinate l'estremo superiore e inferiore di B. Dite se sono massimo e minimo, rispettivamente.

1.3) Sia $C = \{x_n = \sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right) : n \in \mathbf{N}\}$. Trovate, se esistono, $\inf C/ \sup C$ e $\min C/ \max C$.

1.4) Sia $D = \{x_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n}\right) : n \in \mathbf{N}\,, n \geq 1\}$. Determinate, usando il teorema di esistenza del limite per funzioni monotone, $\inf D$ e $\sup D$.

1.5) Provate, per induzione, che vale $3^n \geq n2^n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 0$.

1.6) Provate che la somma dei primi n numeri dispari vale n^2, ossia $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$, per ogni $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$.

1.7) Dato il numero complesso $z = \dfrac{(2+i)(5-\frac{1}{2}i)}{1+\frac{1}{2}i}$,

a) determinate la sua parte reale e la sua parte immaginaria;
b) determinate $\overline{z}$ e $|z|$;
c) rappresentate z e $\overline{z}$ nel piano complesso.
d) È vero che $\arg z \in \left]-\dfrac{\pi}{4}, 0\right[$?

1.8) Dato il numero complesso $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}$,

a) determinate la sua forma trigonometrica.
b) Rappresentate nel piano complesso z e $\overline{z}$.
c) Calcolate z^{41} e rappresentatelo nel piano complesso.

1.9) Determinate in $\mathbf{C}$ le soluzioni dell'equazione $(z^2 - 2z + 4)(z^3 - 2) = 0$ e scrivetele in forma trigonometrica.

1.10) Determinate in $\mathbf{C}$ le soluzioni dell'equazione $|z|^2 - z|z| + z = 0$ e scrivetele in forma trigonometrica.

1.11) Determinate le coppie $(z, w) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ di soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} z^2 - \overline{z} + w = 1 \\ \overline{w} + z - 2 = 0\,. \end{cases}$$