Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione

CdL in Informatica, Ingegneria dell'informazione e delle comunicazioni e

Ingegneria dell'informazione e organizzazione d'impresa

a.a. 2016-17 - PIAZZA3 - *"Continuità/derivabilità di funzioni definite a tratti-Studio di funzioni"*

3.1) Sia $g \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ una funzione tale che $g(0) = -2$ e $g'(0) = 3$. Posto $f(x) = g^2(\sin 2x)$, calcolate $f'(0)$.

3.2) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x) = 2x - \cos x$. Provate che f ammette funzione inversa f^{-1} . Calcolate poi $(f^{-1})'(\pi)$.

3.3) Determinate l'equazione della retta tangente r al grafico di $f(x) = x^2 \log x$ nel punto $(1, 0)$. Studiate brevemente f e rappresentate graficamente r e f nello stesso sistema di riferimento.

3.4) *Nei seguenti esercizi per lo studio della derivabilità/non derivabilità di una funzione in un punto usate o la sua definizione oppure il corollario del teorema di de l'Hopital visto a lezione.*

a) Dite quali delle seguenti funzioni sono derivabili su tutto $\mathbf{R}$: $f(x) = x - |x|$, $g(x) = (x + |x|)^2$, $h(x) = x \sin |x|$.

b) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} |1 + x| - 1 & \text{se } x < 0 \\ 2 \sin x & \text{se } x \geq 0 \,. \end{cases}$$

Determinate gli insiemi di continuità e derivabilità della funzione e rappresentatela graficamente.

c) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 2x & \text{se } x \leq 1 \\ ax^2 - b & \text{se } x > 1 \,. \end{cases}$$

Determinate i valori di $a, b \in \mathbf{R}$ tali che f risulti derivabile in $x = 1$. Per tali valori di a e b rappresentate graficamente f . La funzione f risulta derivabile due volte in $x = 1$?

3.5) Rappresentate graficamente $g(x) = |x^2 - 1|$. Usando le caratteristiche fondamentali delle funzioni coinvolte (segno, monotonia, comportamento agli estremi del dominio) rappresentate graficamente le funzioni $f(x) = \arctan |x^2 - 1|$ e $f(x) = e^{\arctan |x^2 - 1|}$.

3.6) Determinate i punti di massimo e di minimo (sia locali che assoluti) della funzione $f(x) = |2x^3 - 9x^2 + 12x|$ su $[-1, 3]$.

3.7) Studiate le seguenti funzioni individuando il dominio (se non indicato), il segno (quando possibile), il comportamento agli estremi del dominio (asintoti), la derivata prima e il suo segno (monotonia), la derivata seconda e il suo segno (quando possibile) (concavità/convessità), e tracciate un grafico qualitativo:

i) $$f(x) = \begin{cases} x\sqrt{|x-4|-2} & \text{se } x < 0 \\ \arctan\bigl(-x^2\bigr) & \text{se } x \geq 0\,; \end{cases}$$

ii) $$f(x) = \frac{e^{|x|}}{e^x - e}\,;$$

iii) $$f(x) = \sqrt{|x|}\,\log x^2\,;$$

iv) $$f(x) = \frac{\sqrt{|x^2-4|}}{x}\,;$$

v) $$f(x) = \arctan\frac{1}{x} + |x+1|\,.$$