

- 1) Studiate le seguenti funzioni (dominio, simmetrie, limiti, segno, continuità, derivabilità, punti critici e loro natura, convessità/concavità se possibile) e tracciate di ciascuna un grafico qualitativo:

i) $f(x) = |x| - \sqrt{|x|}$

ii) $f(x) = \sqrt{x + \frac{8}{x} + \left|1 - \frac{8}{x}\right|}$

iii) $f(x) = \frac{\log x}{1 + \log x}$

iv) $f(x) = \frac{1 + 3x^4}{x^2}$

v) $f(x) = \frac{x - 4 + |x + 4|}{2} e^x$

vi) $f(x) = \frac{e^x}{1 - x^2}$

vii) $f(x) = \log \left(\frac{x^2 - 2|x| + 1}{x + 1} \right) .$

- 2) Studiate le seguenti funzioni (dominio, simmetrie, limiti, segno, continuità, derivabilità, punti critici e loro natura, convessità/concavità se possibile) e tracciate di ciascuna un grafico qualitativo:

i) $f(x) = x - \arctan x .$

Nota: dallo studio di f risulta che $\arctan x > x$ per ogni $x < 0$ e $\arctan x < x$ per ogni $x > 0$.

ii) $f(x) = x + \arctan \left(\frac{2x + 1}{x} \right) .$

Suggerimento: per posizionare correttamente il valore massimo locale per f si ricordi la *Nota* in i).

- 3) Trovate, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, il numero delle soluzioni delle seguenti equazioni:

$$\text{i)} \quad \frac{1 - 10x^{10}}{x^{11}} = \alpha$$

$$\text{ii)} \quad \frac{x^2}{18} = |\log x| + \alpha.$$

4) Dimostrate che, per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$, la funzione $f(x) = x^5 - 82x + \alpha$ ha al più uno zero in $[-2, 2]$.

5) ... *per finire in gloria* ...:

i) Studiate la seguente funzione (dominio, simmetrie, limiti, segno, continuità, derivabilità, punti critici e loro natura) e tracciatene un grafico qualitativo:

$$f(x) = \frac{1 + x^2}{1 - x^3}.$$

Suggerimento: per lo studio del segno di f' bisogna studiare anche il segno di $g(x) = x^3 + 3x + 2$. Si provi, utilizzando il teorema di esistenza degli zeri, che g ammette un unico zero nell'intervallo $[-1, 0]$.

ii) Studiate la seguente funzione (dominio, simmetrie, limiti, segno, continuità, derivabilità, punti critici e loro natura, convessità/concavità) e tracciatene un grafico qualitativo:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}.$$

Suggerimento: per lo studio del segno di f' bisogna fare un breve studio della funzione $g(x) = (x - 1)e^x + 1$. Per lo studio del segno di f'' bisogna fare un breve studio della funzione $h(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x - 2$.