

Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
 CdL in Informatica, Ingegneria dell'Informazione e delle Comunicazioni
 Ingegneria dell'Informazione e organizzazione d'impresa
 a.a. 2016-2017 - Foglio di esercizi 0 - 29 sett. 2016

Risolvere in $\mathbb{R}$ le seguenti equazioni o disequazioni:

1) a) i) $\frac{2 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + 1} = \frac{x + \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}}$

Osserviamo che $\forall x \neq -1, 0, \frac{1}{2}$ possiamo scrivere $\frac{2x-1}{1+x} = \frac{2x+1}{2x-1}$, ossia

$$(2x-1)^2 = (2x+1)(x+1), \text{ da cui } 4x^2 - 4x + 1 = 2x^2 + 3x + 1.$$

Abbiamo dunque $2x^2 - 7x = 0$, e l'insieme delle soluzioni è

$$S = \left\{ \frac{7}{2} \right\}.$$

□

ii) $\frac{2 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + 1} \leq \frac{x + \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}}$

Osserviamo che $\forall x \neq 0$, la diseq. data è equivalente a

$$\frac{2x-1}{1+x} - \frac{x+\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}} \leq 0,$$

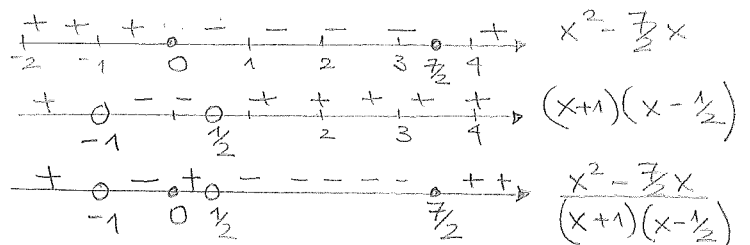
$$\text{ossia } \frac{(2x-1)(x-\frac{1}{2}) - (x+\frac{1}{2})(x+1)}{(x+1)(x-\frac{1}{2})} \leq 0.$$

$$\text{Ne segue } \frac{2x^2 - 2x + \frac{1}{2} - x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}}{(x+1)(x-\frac{1}{2})} \leq 0,$$

da cui

$$\frac{x^2 - \frac{7}{2}x}{(x+1)(x-\frac{1}{2})} \leq 0.$$

(il pallino 0 indica che $x = -1, x = \frac{1}{2}$ non sono ammissibili, poiché in tali pt. annulla il denominatore)



Tenendo conto che $x=0$ non è ammissibile, possiamo concludere che l'insieme delle soluzioni della diseq. data è

$$S =]-1, 0[\cup]\frac{1}{2}, \frac{7}{2}].$$

■

b) i) $\bullet \frac{3}{x^2+x-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2-x} + \frac{1}{x}$

osserviamo che l'eq. è equivalente a $\frac{6}{2x^2+2x-1} = \frac{2}{(2-x)x}$, e

$\forall x \neq \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}, 0, 2$ è equiv. a $3(2x-x^2) = 2x^2+2x-1$.

Risulta allora $5x^2-4x-1=0$, ossia $x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{10} =$
 $= \frac{4 \pm 6}{10} = \left\{ -\frac{1}{5}, 1 \right\}$. L'insieme delle soluzioni è $S = \left\{ -\frac{1}{5}, 1 \right\}$. $\square$

ii) $\bullet \frac{3}{x^2+x-\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2-x} + \frac{1}{x}$

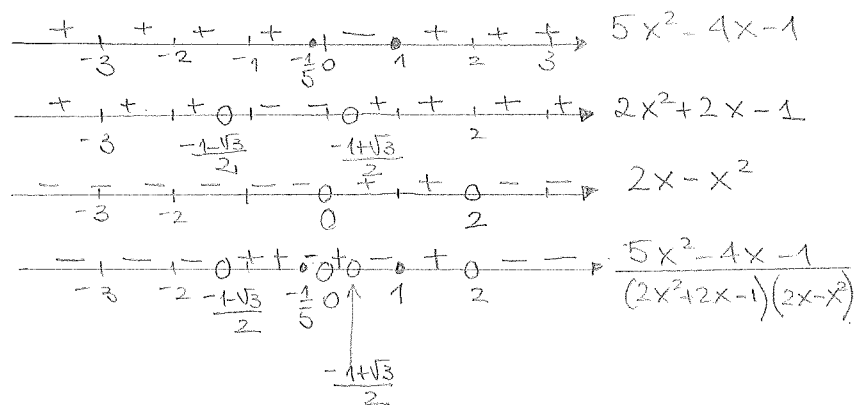
Osserviamo che la diseq. è equivalente a $\frac{6}{2x^2+2x-1} - \frac{2}{(2-x)x} \leq 0$,

ossia a

$$\frac{3(2x-x^2) - (2x^2+2x-1)}{(2x^2+2x-1)(2x-x^2)} \leq 0.$$

Ne segue

$$\frac{5x^2-4x-1}{(2x^2+2x-1)(2x-x^2)} \geq 0.$$



L'insieme delle soluzioni della diseq. data è dunque

$$S = \left[-\frac{1-\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{5} \right] \cup \left[0, -\frac{1+\sqrt{3}}{2} \right] \cup [1, 2[.$$

$\square$

iii) $\bullet \frac{3}{x^2+x-\frac{1}{2}} > \frac{1}{2-x} + \frac{1}{x}$

Procedendo come sopra si ottiene che la diseq. data è

equivalente a $\frac{5x^2-4x-1}{(2x^2+2x-1)(2x-x^2)} < 0$. Dallo studio del segno qui

sopra

possiamo immediatamente concludere che l'insieme delle soluzioni

è dato da $S =]-\infty, -\frac{1-\sqrt{3}}{2}[\cup]-\frac{1}{5}, 0[\cup]-\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 1[\cup]2, +\infty[.$ $\square$

c) i) $x + \frac{5}{x-1} = \frac{9-4x}{x-1}.$

Osserviamo che l'eq. è equivalente a $\frac{x^2-x+5}{x-1} = \frac{9-4x}{x-1}$ e $\forall x \neq 1$

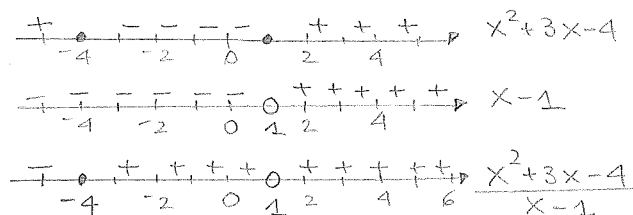
è equivalente a $x^2-x+5 = 9-4x$. Risultava allora $x^2+3x-4=0$,

ovvia $x_{1/2} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$. L'insieme delle soluzioni è $S = \{-4\}.$ $\square$

ii) $x + \frac{5}{x-1} \geq \frac{9-4x}{x-1}$

Notiamo che la diseq. è equivalente a $\frac{x^2-x+5}{x-1} - \frac{9-4x}{x-1} \geq 0$,

ovvia a $\frac{x^2+3x-4}{x-1} \geq 0.$



L'insieme delle soluzioni della diseq. data è dunque

$S = [-4, +\infty[\setminus \{1\}.$ $\blacksquare$

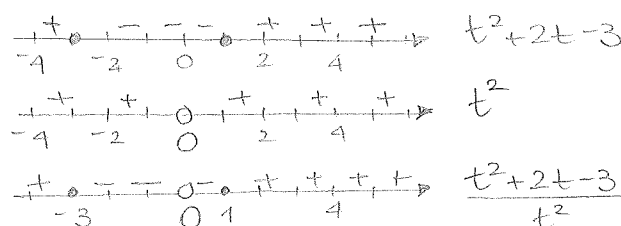
2) a) $-\frac{3}{(4-3x)^2} + \frac{2}{4-3x} + 1 \geq 0$

Segue equivalentemente

$$\frac{-3 + 2(4-3x) + (4-3x)^2}{(4-3x)^2} \geq 0.$$

Poniamo $4-3x=t$; allora la diseq. diventa

$$\frac{t^2+2t-3}{t^2} \geq 0.$$



Risultava allora $t \leq -3$ oppure $t \geq 1$, da cui

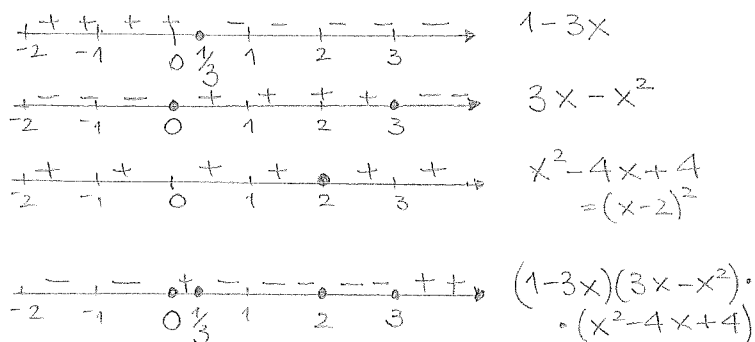
$4-3x \leq -3$ oppure $4-3x \geq 1$. Si conclude facilmente che l'insieme delle soluzioni della diseq. data è

$$S =]-\infty, 1] \cup \left[\frac{7}{3}, +\infty\right[.$$

□

b) $(1-3x)(3x-x^2)(x^2-4x+4) < 0$

Notiamo che



e l'insieme delle soluzioni ricercato è $S =]-\infty, 0[\cup \left[\frac{4}{3}, 2\right[\cup]2, 3[.$

□

$$c) \begin{cases} x^2(x-1) \leq 0 \\ x(2-2x)+3 < x \\ x^2-x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(x-1) \leq 0 \\ 2x^2-x-3 > 0 \\ x^2-x+2 \geq 0 \end{cases}$$

Perché $x^2 \geq 0$ e $=0 \Leftrightarrow x=0$,

$$2x^2-x-3=0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ -1 \end{cases}$$

$$x^2-x+2=0 \quad \text{per nessun } x \in \mathbb{R},$$

si ha

$$x^2(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$$

$$2x^2-x-3 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ o } x > \frac{3}{2}$$

$$x^2-x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

e l'insieme delle soluzioni ricercato è $S =]-\infty, -1[.$

■

$$3) a) \bullet \sqrt{6x} - 2\sqrt{x^2-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{6x} = 2\sqrt{x^2-1} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-1 \geq 0 \\ 6x = 4(x^2-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^2-3x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è dato da $S = \underline{\underline{\{2\}}}$.

$$\bullet \sqrt{6x} - 2\sqrt{x^2-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \sqrt{6x} > 2\sqrt{x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-1 \geq 0 \\ 6x > 4(x^2-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^2-3x-2 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -\frac{1}{2} < x < 2 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni della diseq. data è $S = \underline{\underline{[1, 2[}}$. $\square$

$$b) \bullet \sqrt{x} - \sqrt{x-1} - \frac{1}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{x-1} + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 1 \\ x = x-1 + \sqrt{x-1} + \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x-1} = \frac{3}{4} \Rightarrow x-1 = \frac{9}{16} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni dell'eq. data è $S = \underline{\underline{\{\frac{25}{16}\}}}$. $\square$

$$\bullet \sqrt{x} - \sqrt{x-1} - \frac{1}{2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 1 \\ x \geq x-1 + \sqrt{x-1} + \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x-1} \leq \frac{3}{4} \Rightarrow x \leq \frac{25}{16} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni della diseq. data è $S = \underline{\underline{[1, \frac{25}{16}]}}$. $\square$

c) $\bullet \sqrt{x} + 2x = 3$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3 - 2x \geq 0 \\ x = (3 - 2x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq \frac{3}{2} \\ 0 = 4x^2 - 13x + 9 \end{cases}$$

$$\text{Ora } 4x^2 - 13x + 9 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{8} \\ = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{8} = \begin{cases} \frac{9}{4} \\ 1 \end{cases}$$

Risulta che l'insieme delle soluzioni è dato da

$S = \{1\}$. □

$\bullet \sqrt{x} + 2x < 3$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3 - 2x > 0 \\ x < (3 - 2x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < \frac{3}{2} \\ 4x^2 - 13x + 9 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < \frac{3}{2} \\ x < 1 \text{ o } x > \frac{9}{4} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è dato da $S = [0, 1[$. □

d) $\bullet \sqrt[3]{x^2 - 1} - 2 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2 - 1} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3.$$

L'insieme delle soluzioni è dato da $S = [-3, 3]$. □

$\bullet \sqrt{x^2 - 1} - 2 < 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} < 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 - 1 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \text{ o } x \geq 1 \\ -\sqrt{5} < x < \sqrt{5} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è dato da $S = \underline{\underline{]-\sqrt{5}, -1] \cup [1, \sqrt{5}[}}$. □

e) • $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{x} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x - \sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{1-x^2}} \geq 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1-x^2 > 0 \\ x < 0 \\ \frac{x - \sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{1-x^2}} \geq 0 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{verificata per tali } x \end{array} \right\} \leftarrow$$

$$\text{o } \left\{ \begin{array}{l} 1-x^2 > 0 \\ x > 0 \\ \frac{x - \sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{1-x^2}} \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x - \sqrt{1-x^2} \geq 0$$

Dal primo sistema si ottiene $-1 < x < 0$, mentre il secondo è equiv. a $\left\{ \begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ 1-x^2 \leq x^2 \end{array} \right.$, da cui $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x < 1$.

In definitiva, l'insieme delle soluzioni è dato da

$S = \underline{\underline{]-1, 0[\cup [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1[}}$. □

f) • $(\sqrt{1-x^2} - x)(\sqrt[3]{x+1} + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1-x^2 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 1-x^2 = x^2 \end{array} \right. \text{ o } \left\{ \begin{array}{l} 1-x^2 \geq 0 \\ x+1 = -8 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 1 \\ x \geq 0 \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right. \text{ o } \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 1 \\ x = -9 \end{array} \right.$$

L'insieme delle soluzioni è dato da $S = \underline{\underline{\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}}}$. □

g) • $\sqrt{x^2 - 2x + a^2}$ è ben definito $\forall x \in \mathbb{R}$ se e solo se $x^2 - 2x + a^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, ossia $\Delta = 4 - 4a^2 \leq 0$, da

ai $a \in \underline{]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[}$.



4) a) • $|x| + |x-1| - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ -x - (x-1) - 3 = 0 \end{cases} \circ \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ x - (x-1) - 3 = 0 \end{cases} \circ \begin{cases} x \geq 1 \\ x + (x-1) - 3 = 0 \end{cases};$$

ne segue

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ x = -1 \end{cases} \circ \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ -2 = 0 \end{cases} \circ \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

L'insieme delle soluzioni è dato da $S = \underline{\underline{\{-1, 2\}}}$.



• $|x^2 - 1| - 3 \leq 0$

$$\Leftrightarrow |x^2 - 1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x^2 - 1 \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{-2 \leq x^2 \leq 4}_{\text{sempre vero}} \Rightarrow \underline{\underline{S = [-2, 2]}}.$$



b) • $2 - |1 - x^3| < 0$

$$\Leftrightarrow |1 - x^3| > 2 \Leftrightarrow 1 - x^3 < -2 \circ 1 - x^3 > 2$$

$$\Leftrightarrow x^3 > 3 \circ x^3 < -1 \Rightarrow \underline{\underline{S =]-\infty, -1[\cup]\sqrt[3]{3}, +\infty[}}.$$



• $|1 - |1 - x|| \leq 0$

$$\Leftrightarrow 1 - |1 - x| = 0 \Leftrightarrow |1 - x| = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 - x = -1 \circ 1 - x = 1 \Rightarrow \underline{\underline{S = \{0, 2\}}}$$



c) • $3 - ||x| - 2| > 1$

$$\Leftrightarrow ||x| - 2| < 2 \Leftrightarrow -2 < |x| - 2 < 2$$

$$\Leftrightarrow 0 < |x| < 4 \Rightarrow \underline{\underline{S =]-4, 4[\setminus \{0\}}}$$



• $|2x - 1| = x - 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ 2x - 1 = x - 3 \end{cases} \circ \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ -(2x - 1) = x - 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x = -2 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x \geq 3 \\ 3x = 4 \leadsto x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Risulta che l'insieme delle soluzioni è dato da $S = \emptyset$. $\square$

d) $|x-1| \geq |3-|x+1||$

$$\Leftrightarrow -|x-1| \leq 3-|x+1| \leq |x-1|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x+1| - |x-1| \leq 3 \\ |x-1| + |x+1| \geq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ -(x+1) + (x-1) \leq 3 \\ -(x-1) - (x+1) \geq 3 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} -1 < x < 1 \\ (x+1) + (x-1) \leq 3 \\ -(x-1) + (x+1) \geq 3 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ (x+1) - (x-1) \leq 3 \\ (x-1) + (x+1) \geq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ -2 \leq 3 \\ -2x \geq 3 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} -1 < x < 1 \\ 2x \leq 3 \\ 2 \geq 3 \text{ impossibile} \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ 2 \leq 3 \\ 2x \geq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \leq -\frac{3}{2} \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Risulta che l'insieme delle soluzioni è dato da $S =]-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [\frac{3}{2}, +\infty[$. $\square$

• $\frac{1}{x-1} \geq \frac{3}{|x|+1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{1}{x-1} \geq \frac{3}{x+1} \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < 0 \\ \frac{1}{x-1} \geq \frac{-3}{x-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{-2x+4}{x^2-1} \geq 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < 0 \\ \frac{4}{x-1} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < -1 \text{ o } 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < 0 \\ x > 1 \end{cases} \text{ impossibile}$$

Ne segue che l'insieme delle soluzioni è dato da $S =]1, 2]$. $\square$

e) • $\sqrt{|x|-2} \geq x+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x|-2 \geq 0 \\ x+1 < 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} |x|-2 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ |x|-2 \geq (x+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \quad \circ \quad x \geq 2 \\ x < -1 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x \leq -2 \quad \circ \quad x \geq 2 \\ x \geq -1 \\ x^2 + 2x - |x| + 3 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 2 \\ x^2 + x + 3 \leq 0 \text{ impossibile} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è dato da $S =]-\infty, -2]$. ■

5) a) • $\log_2 x^2 = \log_2 (3|x|-2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 0 \\ 3|x|-2 > 0 \\ x^2 = 3|x|-2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ |x| > \frac{2}{3} \\ x^2 - 3|x| + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x < -\frac{2}{3} \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x > 0 \\ x > \frac{2}{3} \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x < -\frac{2}{3} \\ x = -1, x = -2 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x > 0 \\ x > \frac{2}{3} \\ x = 1, x = 2 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è dato da $S = \{-2, -1, 1, 2\}$. □

• $\log_2 x^2 < \log_2 (3|x|-2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 0 \\ 3|x|-2 > 0 \\ x^2 < 3|x|-2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{2}{3} \\ x^2 + 3x + 2 < 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ x^2 - 3x + 2 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{2}{3} \\ -2 < x < -1 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ 1 < x < 2 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è dato da $S =]-2, -1[\cup]1, 2[$. □

• $\log_{\frac{1}{2}} x^2 \leq \log_{\frac{1}{2}} (3|x|-2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 0 \\ 3|x|-2 > 0 \\ x^2 \geq 3|x|-2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{2}{3} \\ x^2 + 3x + 2 \geq 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -2/3 \\ x \leq -2 \text{ o } x \geq -1 \end{cases} \quad \text{ o } \quad \begin{cases} x > 2/3 \\ x \leq 1 \text{ o } x \geq 2 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è dato da $S = \underline{\underline{]-\infty, -2] \cup [-1, -2/3[\cup]2/3, 1] \cup [2, +\infty[}}$. □

b) • $\log_{1/3}(x^2 - 3x + 2) \geq 0 \iff \log_{1/3}(x^2 - 3x + 2) \geq \log_{1/3} 1$

$$\iff \begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0 \\ x^2 - 3x + 2 \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x < 1 \text{ o } x > 2 \\ \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è dato da $S = \underline{\underline{[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1[\cup]2, \frac{3+\sqrt{5}}{2}]}}$. □

c) • $\log_3 |x| + \log_3 (1-|x|) \leq 1 \iff \log_3 |x| + \log_3 (1-|x|) \leq \log_3 3$

$$\iff \begin{cases} |x| > 0 \\ 1-|x| > 0 \\ |x|(1-|x|) \leq 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 0 \\ -1 < x < 1 \\ |x|(1-|x|) - 3 \leq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -1 < x < 0 \\ -x(1+x) - 3 \leq 0 \end{cases} \quad \text{ o } \quad \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x(1-x) - 3 \leq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -1 < x < 0 \\ x^2 + x + 3 \geq 0 \text{ sempre} \end{cases} \quad \text{ o } \quad \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x^2 - x + 3 \geq 0 \text{ sempre} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è dato da $S = \underline{\underline{]-1, 1[\setminus \{0\}}}$. □

d) • $2 \log(x-1) - \log(|x|+2) \leq \log x$

$$\iff \begin{cases} x-1 > 0 \\ x > 0 \\ \log \frac{(x-1)^2}{|x|+2} \leq \log x \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1 \\ \frac{(x-1)^2}{x+2} \leq x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x > 1 \\ (x-1)^2 \leq x(x+2) \end{cases} \quad (\text{si noti che } x+2 > 0 !)$$

$$\iff \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - 2x + 1 \leq x^2 + 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \geq 1/4 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è dato da $S = \underline{\underline{[1, +\infty[}}$. ■

$$6) a) \cdot \frac{e^{|x|-3} e^{x^2}}{e^x} \leq e^{x-1}$$

$$\Leftrightarrow e^{|x|-3+x^2-x} \leq e^{x-1}$$

$$\Leftrightarrow |x|-3+x^2-x \leq x-1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 2 \leq 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 3x - 2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < 0 \\ \frac{3-\sqrt{17}}{2} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è dato da $S = \left[\frac{3-\sqrt{17}}{2}, 2 \right]$. □

$$b) \cdot \sqrt{3^x - 1} = \frac{3^{\frac{x}{2}}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^x - 1 \geq 0 \\ 3^x - 1 = \frac{3^x}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3^x = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \log_3 \frac{4}{3} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è dato da $S = \left\{ \log_3 \frac{4}{3} \right\}$. $= \log_3 4 - 1$.
□

$$c) \cdot (\log_3 9) e^{2x} + \left(\log_3 \frac{1}{27} \right) e^x + \log_4 4 < 0$$

$$\Leftrightarrow 2e^{2x} - 3e^x + 1 < 0$$

Poniamo $t = e^x$ e mi ha $2t^2 - 3t + 1 < 0$, ossia

$\frac{1}{2} < t < 1$. Rimane da risolvere $\frac{1}{2} < e^x < 1$, cioè $e^{\log \frac{1}{2}} < e^x < e^0$, da cui $-\log 2 < x < 0$.

L'insieme delle soluzioni è dato da $S =]-\log 2, 0[$. ■