

Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
 CdL in Informatica - CdL in Ingegneria dell'Informazione e delle Comunicazioni
 CdL in Ingegneria dell'Informazione e Organizzazione d'Impresa
 ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1
 a.a. 2016-2017 - Trento, 10 gennaio 2017

FILA (A)

21) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| < 3\}$: $|x-1| < 3 \Leftrightarrow -3 < x-1 < 3 \Leftrightarrow -2 < x < 4$

$\Rightarrow \underline{\underline{\inf A = -2}}, \underline{\underline{\sup A = 4}}.$ □

22) $z = 2 - 2i$; $z = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right).$ □

23) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |\sin x| + 2$: pt. di minimo $x_k = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

pt. di massimo $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$ □

24) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ e^x + b & \text{se } x > 0 \end{cases}$ funzione continua $\Leftrightarrow \underline{\underline{b = -1}}.$ □

25) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}.$ □

26) $f(x) = 2x + \sin x$; allora $2x + \sin x = \pi + 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$; quindi

$(f^{-1})'(\pi+1) = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{[2 + \cos x]_{x=\frac{\pi}{2}}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$ □

27) $\int \frac{2e^x}{e^x+3} dx = 2 \int \frac{e^x}{e^x+3} dx = \underline{\underline{2 \log(e^x+3) + c}}, \quad c \in \mathbb{R}.$ □

28) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left[\log\left(1 + \frac{2}{n}\right) - 2 \sin \frac{1}{n} \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left[\frac{2}{n} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 2 \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]$
 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} [-2 + o(1)] = \underline{\underline{-2}}.$ □

29) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\sqrt{n}(1+n)]^\alpha} < +\infty \Leftrightarrow \frac{3}{2}\alpha > 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha > \frac{2}{3}}}.$ □

30) $y'' - 2y' = 0$; risolviamo l'eq. caratteristica associata $z^2 - 2z = 0.$

Abbiamo $z=0$ e $z=2$. Quindi l'integrale generale

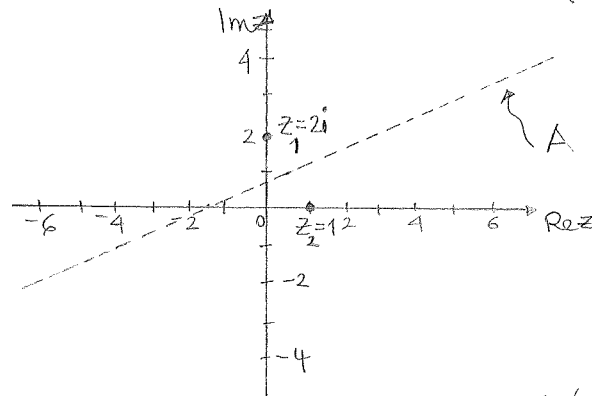
dell'eq. differenziale data è $y(x) = c_1 + c_2 e^{2x}$, al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$ ■

b1) i) Poniamo $z = x + iy$. Allora $|z - 2i| = |z - 1| \Leftrightarrow$
 $|z - 2i|^2 = |z - 1|^2$, ossia $|x + i(y - 2)|^2 = |(x - 1) + iy|^2$,
 da cui

$$x^2 + (y - 2)^2 = (x - 1)^2 + y^2.$$

Ne segue $-4y + 4 = -2x + 1$, ossia $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$.

Adesso allora $A = \{z \in \mathbb{C} : z = x + i\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right), x \in \mathbb{R}\}$.



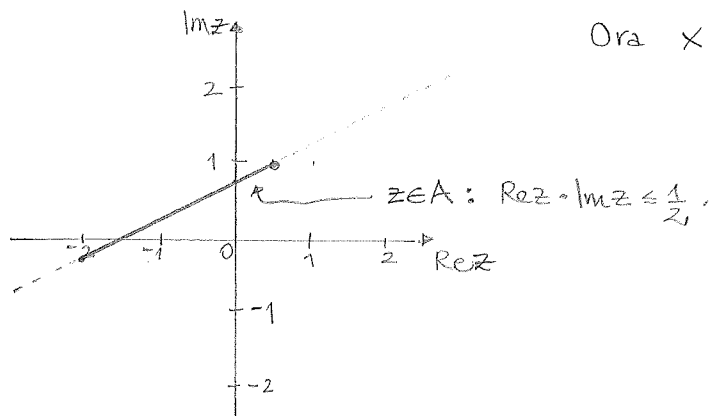
A corrisponde all'insieme di tutti i punti $z \in \mathbb{C}$ che distano da $z_1 = 2i$ quanto distano da $z_2 = 1$.

□

ii) $z \in A : \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow z = x + i\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right)$ con $x\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) \leq \frac{1}{2}$.

$$\text{Ora } x \cdot \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$



■

b2) i) $f(x) = \log(3+x)$, $f'(x) = \frac{1}{3+x}$, $f''(x) = \frac{-1}{(3+x)^2}$, $f'''(x) = \frac{+2}{(3+x)^3}$

Polinomio di Taylor di ordine 3, centrato in $x_0 = 1$, di $f =$

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^3 \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k$$

$$= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

$$= \log 4 + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{16 \cdot 2!}(x-1)^2 + \frac{1}{32 \cdot 3!}(x-1)^3.$$

□

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \log 4}{\sin(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{4}(x-1) + o((x-1))}{(x-1) + o((x-1))} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}.$

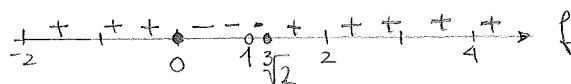
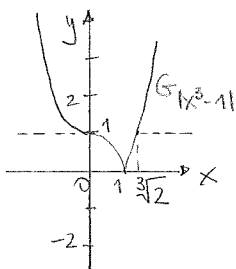
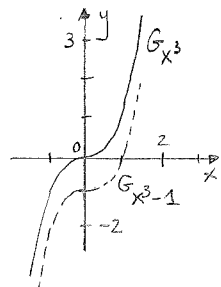
■

b3) i) $f(x) = \log|x^3-1|$

• $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

• nessuna simmetria evidente

• segno di f : $|x^3-1|=1 \Leftrightarrow x^3-1=\pm 1 \begin{cases} x=\sqrt[3]{2} \\ x=0 \end{cases}$



nota: $|x^3-1| > 1$ se $x < 0$ o $x > \sqrt[3]{2}$

e quindi $\log|x^3-1| > 0$;

$0 < |x^3-1| < 1$ se $0 < x < \sqrt[3]{2}$, $x \neq 1$ e

quindi $\log|x^3-1| < 0$. $\square$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ Sono asintoti obliqui poiché $f(x) \sim 3 \log|x|$ per $x \rightarrow \pm\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$

$x=1$ è asintoto verticale per f (da destra e da sinistra).

• f è continua in tutti i pt. del suo dominio.

• $\text{dom } f' = \text{dom } f$ Notiamo che $f(x) = \begin{cases} \log(x^3-1) & \text{se } x > 1 \\ \log(-x^3+1) & \text{se } x < 1 \end{cases}$

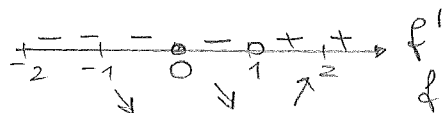
e $f'(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{x^3-1} & \text{se } x > 1 \\ \frac{-3x^2}{-x^3+1} & \text{se } x < 1 \end{cases}$.
Sono uguali!!

Altro modo

$f'(x) = \frac{3x^2}{x^3-1}$ se $x \neq 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x=0$ pt. critico per f

non è ne pt. di minimo
loc. ne pt. di massimo loc.
per f .



OSS. In generale, se g è derivabile

$(\log|g(x)|)' = \frac{g'(x)}{g(x)}$

$\forall x \in \text{dom } g: g(x) \neq 0$

• $\text{dom } f'' = \text{dom } f$

$f''(x) = \frac{6x(x^3-1) - 3x^2(3x^2)}{(x^3-1)^2} =$

$= \frac{-3x^4 - 6x}{(x^3-1)^2} \quad \forall x \neq 1.$

Om A

$$f''(x) = \frac{-3x(x^3+2)}{(x^3-1)^2} \quad \forall x \neq 1.$$

Ne segue che

$x = -\sqrt[3]{2}$, $x = 0$ pt. di flesso per f .

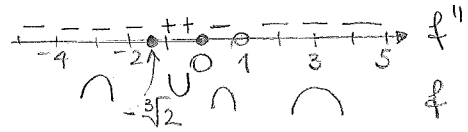
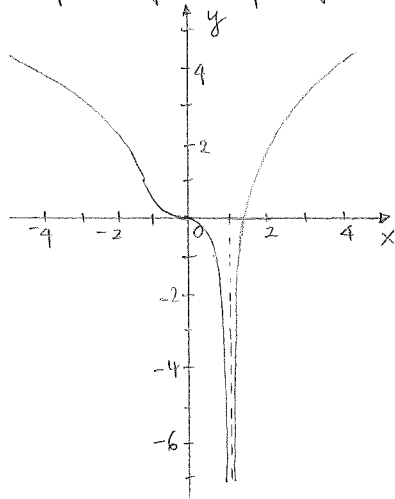


grafico qualitativo di f.

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\log x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^3 - 1)}{\log x} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x^3 (1 - \frac{1}{x^3})}{\log x} =$$

$$x > 1 \text{ for } x \rightarrow +\infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \log x + \log(1 - \frac{1}{x^3})}{\log x} = \underline{\underline{3}}.$$

$$\begin{aligned} b4) \int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2 + 4} dx &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{1}{(x+1)^2 + 4} dx = \\ &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_1^M \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1} dx = \\ &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left[\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) \right]_1^M = \\ &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left[\arctan\left(\frac{M+1}{2}\right) - \arctan 1 \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

b5) $y'' + y = \sin x$: è un'eq. diff. lineare del 2° ordine non-omogenea.

Determiniamo innanzitutto l'integrale generale dell'eq. iff.

omogenea associata, ossia dell'eq. diff. $y'' + y = 0$.

L'eq. caratteristica associata ad essa $z^2 + 1 = 0$ ha

(*) OSS. si può risolvere facilmente anche usando il teorema di de l'Hopital. $\square$

Come soluzioni $z_{1/2} = \pm i$, e quindi l'integrale generale di $y'' + y = 0$ è dato da $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Poiché 0 è soluzione dell'eq. diff. omogenea, dobbiamo cercare una soluzione particolare dell'eq. diff. completa della forma $\bar{y}(x) = ax \cos x + bx \sin x$, con $a, b \in \mathbb{R}$ da determinare. Poiché

$$\bar{y}'(x) = a \cos x - ax \sin x + b \sin x + bx \cos x$$

$$\bar{y}''(x) = -2a \sin x - ax \cos x + 2b \cos x - bx \sin x, \text{ si}$$

$$\text{ha } \bar{y}''(x) + \bar{y}(x) = \sin x \Leftrightarrow 2b = 0, -2a = 1.$$

Quindi $\bar{y}(x) = -\frac{1}{2}x \cos x$. Ne segue che l'integrale generale dell'eq. diff. data è $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2}x \cos x$, al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

b6) ii) $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. f si dice crescente in A se

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2). \quad \square$$

(oss. delle volte "crescente" sta per "strettamente crescente";

in questo caso, $\forall x_1, x_2 \in A, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$). □

ii) Scrivere l'enunciato e la dimostrazione del Teorema di esistenza degli zeri. ■

FILA (B)

21) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| < 4\}$; $|x-2| < 4 \Leftrightarrow -4 < x-2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 6$

$\Rightarrow \underline{\inf A = -2}, \underline{\sup A = 6}$. □

22) $z = 1 - \sqrt{3}i$; $z = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$. □

23) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |\cos x| + 2$: pt. di minimo $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

pt. di massimo $x_k = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. □

24) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + b & \text{se } x \leq 0 \\ -e^x & \text{se } x > 0 \end{cases}$ risulta biettiva $\Leftrightarrow \underline{b = -1}$. □

25) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2} = \underline{\underline{-\frac{\pi}{2}}}$. □

26) $f(x) = 4x - \sin x$; allora $4x - \sin x = 2\pi - 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$; e quindi

$(f^{-1})'(2\pi - 1) = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{[4 - \cos x]_{x=\frac{\pi}{2}}} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$. □

27) $\int \frac{3x}{x^2+4} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2+4} dx = \underline{\underline{\frac{3}{2} \log(x^2+4) + C}}$, $C \in \mathbb{R}$. □

28) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left[\sin \frac{3}{n} - 3 \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left[\frac{3}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 3\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \right]$
 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[+\frac{3}{2} + o(1) \right] = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$. □

29) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\sqrt{n}(1+\sqrt{n})]^{\alpha}} < +\infty \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha > 1}}$. □

30) $y'' + 4y' = 0$; risolviamo l'eq. caratteristica associata $z^2 + 4z = 0$.

Altrimenti $z=0$ e $z=-4$. Quindi l'integrale generale

dell'eq. diff. data è $y(x) = c_1 + c_2 e^{-4x}$, al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

b1) i) Poniamo $z = x + iy$. Allora $|z + 2i| = |z - 1| \Leftrightarrow$

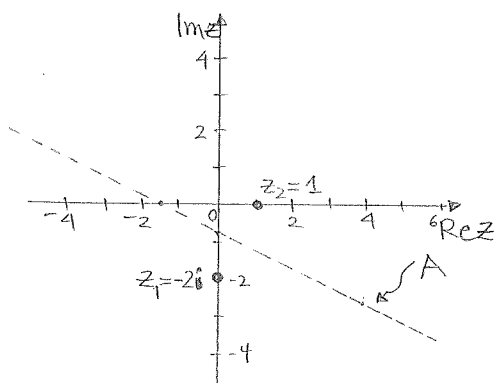
$$|z + 2i|^2 = |z - 1|^2, \text{ ossia } |x + i(y + 2)|^2 = |(x - 1) + iy|^2,$$

da cui

$$x^2 + (y + 2)^2 = (x - 1)^2 + y^2.$$

Ne segue $4y + 4 = -2x + 1$, ossia $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$.

Abbiamo allora $A = \{z \in \mathbb{C} : z = x + i(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}), x \in \mathbb{R}\}$.

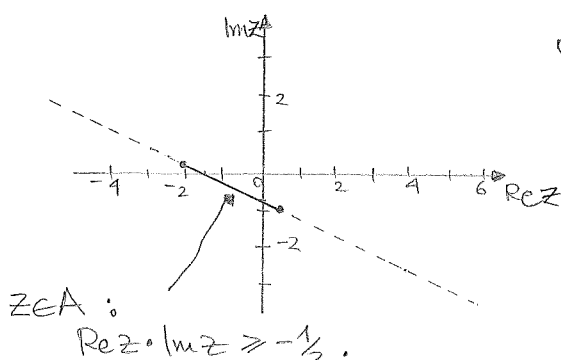


A corrisponde all'insieme di tutti i punti $z \in \mathbb{C}$ che distano da $z_1 = -2i$ quanto distano da $z_2 = 1$. $\square$

ii) $z \in A : \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow z = x + i(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4})$ con $x(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}) \geq -\frac{1}{2}$.

$$\text{Ora } x(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}) \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$



b2) i) $f(x) = \arctan x$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $f'''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$

Polinomio di Taylor di ordine 3, centrato in $x_0 = 1$ di $f =$

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^3 \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k$$

$$= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2 \cdot 2!}(x-1)^2 + \frac{1}{2 \cdot 3!}(x-1)^3.$$

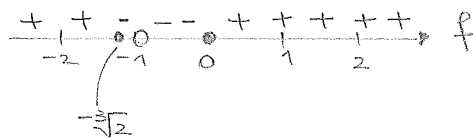
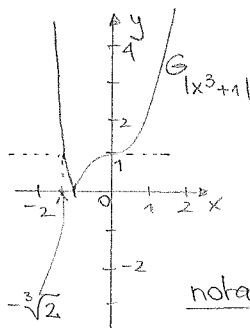
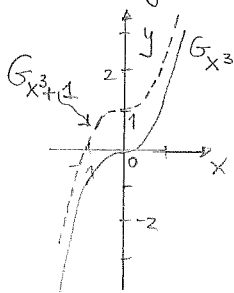
$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \frac{\pi}{4}}{\sin(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2}(x-1) + o((x-1))}{(x-1) + o((x-1))} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

63) i) $f(x) = \log|x^3+1|$

• $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

• nessuna simmetria evidente

• segue da $|x^3+1| = 1 \Leftrightarrow x^3+1 = \pm 1 \begin{cases} x = -\sqrt[3]{2} \\ x = 0 \end{cases}$



nota: $|x^3+1| > 1$ se $x < -\sqrt[3]{2}$ o $x > 0$ e quindi $\log|x^3+1| > 0$

$0 < |x^3+1| < 1$ se $-\sqrt[3]{2} < x < 0$, $x \neq -1$ e quindi $\log|x^3+1| < 0$.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ Sono asintoti obliqui, poiché $f(x) \sim 3 \log|x|$, per $x \rightarrow \pm\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ $x = -1$ è asintoto verticale per f (da destra e da sinistra).

• f è continua in tutti i punti del suo dominio.

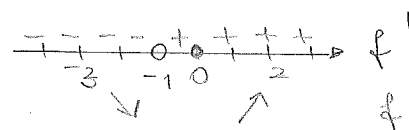
• $\text{dom } f' = \text{dom } f$ Notiamo che $f(x) = \begin{cases} \log(x^3+1) & \text{se } x > -1 \\ \log(-x^3-1) & \text{se } x < -1 \end{cases}$

sono uguali! $f'(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{x^3+1} & \text{se } x > -1 \\ \frac{-3x^2}{-x^3-1} & \text{se } x < -1 \end{cases}$

Allora

$f'(x) = \frac{3x^2}{x^3+1}$ se $x \neq -1$

(vedi Oss. generale a pag. 3)



$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ pt. critico per f (non è né pt. di minimo loc. né pt. di massimo loc. per f)

• $\text{dom } f'' = \text{dom } f$

$f''(x) = \frac{6x(x^3+1) - 3x^2 \cdot 3x^2}{(x^3+1)^2} =$

$= \frac{-3x^4 + 6x}{(x^3+1)^2} \quad \forall x \neq -1$

ossia

$$f''(x) = \frac{-3x(x^3 - 2)}{(x^3 + 1)^2} \quad \forall x \neq -1.$$

Ne segue che

$x=0$, $x=\sqrt[3]{2}$ pt. di flesso per f .

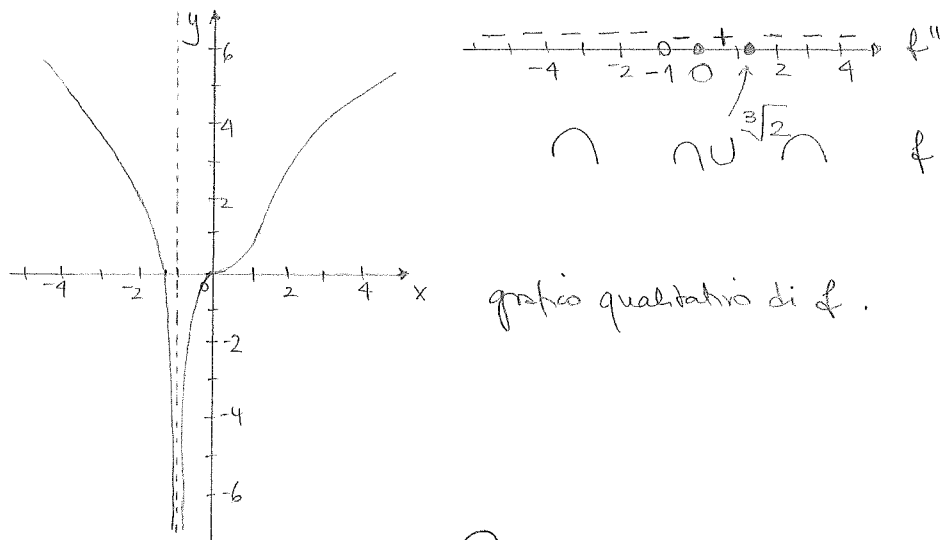


grafico qualitativo di f .

□

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\log x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^3 + 1)}{\log x} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x^3 (1 + \frac{1}{x^3})}{\log x} =$$

$x > -1$ se $x \rightarrow +\infty$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \log x + \log(1 + \frac{1}{x^3})}{\log x} = \underline{\underline{3}}.$$

■

$$\begin{aligned} \text{b4) } \int_{-\infty}^2 \frac{1}{(x+1)^2 + 9} dx &= \lim_{M \rightarrow -\infty} \int_M^2 \frac{1}{(x+1)^2 + 9} dx = \\ &= \lim_{M \rightarrow -\infty} \frac{1}{3} \int_M^2 \frac{\frac{1}{3}}{(\frac{x+1}{3})^2 + 1} dx = \\ &= \lim_{M \rightarrow -\infty} \frac{1}{3} \left[\arctan\left(\frac{x+1}{3}\right) \right]_M^2 = \\ &= \lim_{M \rightarrow -\infty} \frac{1}{3} \left[\arctan 1 - \arctan\left(\frac{M+1}{3}\right) \right] = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) = \underline{\underline{\frac{3\pi}{4}}}. \end{aligned}$$

■

b5) $y'' + y = \cos x$: è un'eq. diff. lineare del 2° ordine non-omogenea.

Determiniamo innanzitutto l'integrale generale dell'eq. diff.

omogenea associata, ossia dell'eq. diff. $y'' + y = 0$.

(*) Oss. si può risolvere facilmente anche usando il teorema di de l'Hopital. □

L'eq. caratteristica associata ad essa $z^2+1=0$ ha come soluzioni $z_{1,2} = \pm i$, e quindi l'integrale generale di $y''+y=0$ è dato da $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Poiché i è soluzione dell'eq. diff. omogenea, dobbiamo cercare una soluzione particolare dell'eq. diff. completa della forma $\bar{y}(x) = ax \cos x + bx \sin x$, con $a, b \in \mathbb{R}$ da determinare. Poiché

$$\bar{y}'(x) = a \cos x - ax \sin x + b \sin x + bx \cos x$$

$$\bar{y}''(x) = -2a \sin x - ax \cos x + 2b \cos x - bx \sin x,$$

$$\text{si ha } \bar{y}''(x) + \bar{y}(x) = \cos x \Leftrightarrow -2a = 0, 2b = 1.$$

Quindi $\bar{y}(x) = \frac{1}{2} x \sin x$. Ne segue che l'integrale generale dell'equazione diff. data è $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} x \sin x$, al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

b6) i) $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. f si dice decreciente in A se $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$. □

(Oss. delle volte "decreciente" sta per "strett. decrescente"; in questo caso, $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. □

ii) Scrivere l'enunciato e la dimostrazione del Teorema dei valori intermedi. ■