

Università degli Studi di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
 CdL in Informatica - CdL in Ingegneria dell'Informazione e delle Comunicazioni
 CdL in Ingegneria dell'Informazione e Organizzazione d'Impresa
 ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1
 a.a. 2016-2017 - Trento, 7 febbraio 2017

FILA (A)

21) $A = \{x \in \mathbb{R} : \log(x-1) \leq 0\} = \underline{[1, 2]}$: infatti, $\log(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow 0 < x-1 \leq 1$
 $\Leftrightarrow 1 < x \leq 2$.
 $B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{|x|-2} \leq 0\} = \underline{]-2, 2[}$: infatti, $\frac{1}{|x|-2} \leq 0 \Leftrightarrow |x|-2 < 0 \Leftrightarrow$
 $|x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$
 Quindi $A \cap B = \underline{[1, 2[}$. □

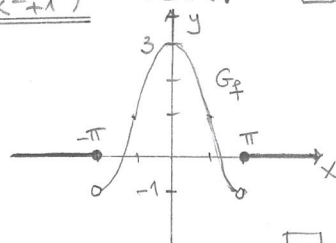
22) $z = 1+2i$ $\bar{z}|z| = (1-2i)\sqrt{1+4} = \underline{\sqrt{5}(1-2i)}$. □

23) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ $g(x) = \begin{cases} \arctan x & \text{se } x \in [0, 1] \\ |x|+1 & \text{altrimenti,} \end{cases}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \arctan(f(x)) = \arctan\left(\frac{1}{x^2+1}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. □

24) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} 1+2\cos x & \text{se } -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

$\inf_{\mathbb{R}} f = \underline{-1}$ $\sup_{\mathbb{R}} f = \underline{3}$. □



25) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} e^{x+a^2} - e & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{2bx - \sin x}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{x+a^2} - e) = e^{a^2} - e = 0 \Leftrightarrow a^2 = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2bx - \sin x}{x} = (2b-1) = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$

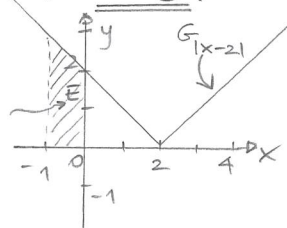
$\Rightarrow \underline{a = \pm 1, b = \frac{1}{2}}$. □

26) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x^2}{\log x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \log x}{\log x} = \underline{2}$ (si può utilizzare anche il teorema di de L'Hopital). □

27) $f(x) = x + \sin x$ $f'(x) = 1 + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1$
 $\Leftrightarrow \underline{x_k = \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}}$. □

28) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^{n+1}+1} x^n$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}+1} \cdot \frac{3^{n+1}+1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \Rightarrow \underline{r=3}$. □

29) $\int_{-1}^0 |x-2| dx = \text{area } E = \underline{\frac{5}{2}}$
 oppure osservando che $\int_{-1}^0 |x-2| dx = \int_{-1}^0 (2-x) dx =$
 $= \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 = -\left(-2 - \frac{1}{2}\right) = \underline{\frac{5}{2}}$. □



30) $\int_1^{+\infty} \frac{3}{x^{\alpha} \sqrt{x}} dx < +\infty \Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{2} > 1 \Leftrightarrow \underline{\alpha > \frac{1}{2}}$. □

b1) i) Sia $A = \{x_n = \frac{n-1}{2n} + \frac{(-1)^n}{2} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$.

Notiamo che se n è pari

$$x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2n}$$

$$\Rightarrow x_2 \leq x_n < 1, \text{ ossia } \frac{3}{4} \leq x_n < 1$$

se n è dispari

$$x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2n}$$

$$\Rightarrow x_1 \leq x_n < 0, \text{ ossia } -\frac{1}{2} \leq x_n < 0.$$

Quindi, $-\frac{1}{2} \leq x_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, ossia l'insieme A è limitato. $\square$

ii) Notiamo che $x_1 \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Quindi

$$\underline{\inf A = \min A = -\frac{1}{2}}. \text{ D'altra parte, } x_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Quindi 1 è un maggiorante di A . Proviamo che è il più piccolo dei maggioranti di A , ossia, fissato $\varepsilon > 0$ arbitrario, $\exists n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, n pari tale che $1 - \varepsilon < x_n$, ossia $1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{2n}$, ossia $\varepsilon > \frac{1}{2n}$.

Dalla proprietà archimedeica dei nr. reali segue che $\exists n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ tale che $\varepsilon > \frac{1}{2n}$. Se tale n è pari, si ha concluso, altrimenti basta prendere $n+1$. Quindi $\sup A = 1$. $\blacksquare$

b2) Ricordiamo che $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$ per $t \rightarrow 0$ e

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3) \text{ per } t \rightarrow 0.$$

Posto $a_n = \left[\sin\left(\frac{2d}{n}\right) - \log\left(1 + \frac{3}{n}\right) \right] n^{\alpha-1}$, abbiamo allora

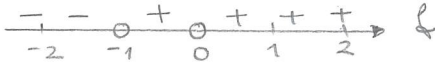
$$\begin{aligned} a_n &= \left[\frac{2d}{n} - \frac{\frac{8d^3}{3}}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \frac{3}{n} + \frac{9}{2n^2} + \frac{27}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right] n^{\alpha-1} \\ &= \left[\frac{2d-3}{n} + \frac{9}{2n^2} + \frac{27-4d^3}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right] n^{\alpha-1} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Se $2d-3 \neq 0$, ossia $d \neq \frac{3}{2}$, si ha che $a_n \sim \frac{2d-3}{n} \cdot n^{\alpha-1}$
 $= \frac{2d-3}{n^{2-\alpha}} \text{ per } n \rightarrow +\infty.$

Se $2d-3 = 0$, ossia $d = \frac{3}{2}$, si ha che $a_n \sim \frac{9}{2n^2} \cdot n^{\alpha-1}$
 $= \frac{9}{2n^{3-\alpha}} = \frac{9}{2n^{3-3/2}},$
 per $n \rightarrow +\infty.$

Per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata segue che per $\alpha \neq \frac{3}{2}$, la serie data risulta convergente se e solo se $2-\alpha > 1$, ossia $\alpha < 1$; inoltre, per $\alpha = \frac{3}{2}$, la serie è convergente, poiché $a_n \sim \frac{9}{2n^{3/2}}$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\frac{3}{2} > 1$. In conclusione, la serie data è convergente per $\alpha < 1$ e $\alpha = \frac{3}{2}$. ■

b3) $f(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{|x|}}$

- $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$
- nessuna simmetria evidente.
- Segno 
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ $y=0$ asint. orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$ (per $x \rightarrow +\infty$).
- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ $x=-1$ asint. verticale per f (da sinistra e da destra)
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ $x=0$ asint. verticale per f (da sinistra e da destra).
- f è continua nel $\text{dom } f$.
- $\text{dom } f' = \text{dom } f$ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)\sqrt{-x}} & \text{se } x < 0, x \neq -1 \\ \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

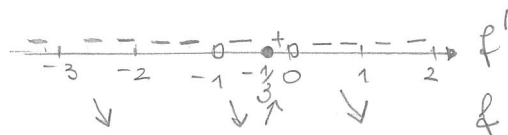
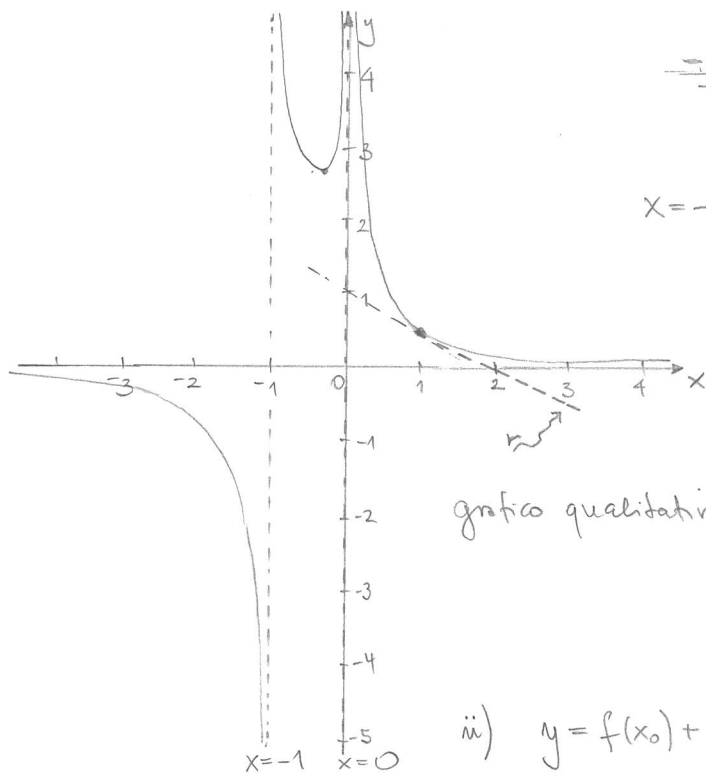
Risulta

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-\left(\sqrt{-x} + (x+1)\frac{-1}{2\sqrt{-x}}\right)}{(x+1)^2(\sqrt{-x})^2} & \text{se } x < 0, x \neq -1 \\ \frac{-\left(\sqrt{x} + (x+1)\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x+1)^2(\sqrt{x})^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-(2(-x) - x - 1)}{2(x+1)^2(\sqrt{-x})^3} & \text{se } x < 0, x \neq -1 \\ \frac{-(2x + x + 1)}{2(x+1)^2(\sqrt{x})^3} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{3x+1}{2(x+1)^2(\sqrt{-x})^3} & \text{se } x < 0, x \neq -1 \\ \frac{-(3x+1)}{2(x+1)^2(\sqrt{x})^3} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Risulta $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ pt. critico per f , $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.6$



$x = -\frac{1}{3}$ pt. di min. loc. stretto per f .

grafico qualitativo di f .

□

ii) $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ con $x_0 = 1$

Abbiamo $f(1) = \frac{1}{2}$ $f'(1) = \frac{-1}{2 \cdot 1 \cdot 1} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow \underline{\underline{y = -\frac{1}{2}x + 1}}$

□

iii) $\int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx$

Ora $\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx = \int \frac{2t}{(t^2+1)t} dt = 2 \arctan t + c = 2 \arctan \sqrt{x} + c$
 $\sqrt{x} = t \quad x = t^2 \quad dx = 2t dt$
 $c \in \mathbb{R}$

Quindi $\int_2^3 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx = \left[2 \arctan \sqrt{x} \right]_2^3 = \underline{\underline{2(\arctan \sqrt{3} - \arctan \sqrt{2})}}$

■

b4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x (e^{\sin t} - 1) dt}{x^k} = \frac{0}{0}$

Osserveremo che dal teorema fond. del Calcolo integrale segue

$\frac{\left(\int_0^x (e^{\sin t} - 1) dt \right)'}{(x^k)'} = \frac{e^{\sin x} - 1}{k x^{k-1}} = \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{k x^{k-1}}$
 $\xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} \cdot \frac{\sin x}{k x^{k-1}}$

Poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{k x^{k-1}} = \begin{cases} 0 & \text{se } k=1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } k=2 \\ +\infty & \text{se } k \geq 3, \end{cases}$$

dal teorema di de l'Hopital segue che il limite dato esiste e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x (e^{\sin t} - 1) dt}{x^k} = \begin{cases} 0 & \text{se } k=1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } k=2 \\ +\infty & \text{se } k \geq 3. \end{cases}$$

b5) i) $f(x) = x^5 - x^3 + x$ è una funzione continua su $[-1, 1]$ e derivabile su $] -1, 1 [$. □

ii) Dobbiamo trovare tutti i pt. $c \in [-1, 1]$: $\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = f'(c)$.
Poiché $f'(x) = 5x^4 - 3x^2 + 1$, dobbiamo trovare tutti i pt. $c \in [-1, 1]$:

$$\frac{1 - (-1)}{1 - (-1)} = 5c^4 - 3c^2 + 1,$$

ossia

$$1 = 5c^4 - 3c^2 + 1,$$

$$\text{ossia } 0 = c^2(5c^2 - 3) \Rightarrow \underline{\underline{c = 0, c_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{3}{5}}}}.$$

b6) i) $f: A \rightarrow B$ è suriettiva in A se $f(A) = B$, ossia se $\forall y \in B \exists x \in A : f(x) = y$. □

ii) Formula del prodotto di due numeri complessi in forma trigonometrica. □

FILA (B)

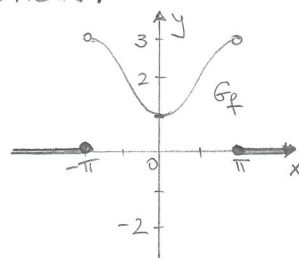
21) $A = \{x \in \mathbb{R} : \log(x-2) \leq 0\} = \underline{[2, 3]}$: infatti, $\log(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow 0 < x-2 \leq 1$
 $\Leftrightarrow 2 < x \leq 3$.
 $B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{|x|-1} \geq 0\} =$: infatti, $\frac{1}{|x|-1} \geq 0 \Leftrightarrow |x|-1 > 0$
 $\Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$
 $= \underline{[-\infty, -1[\cup]1, +\infty[}$.

Quindi $A \cap B = \underline{[2, 3]}$. □

22) $z = 1-2i$ $\bar{z}|z| = (1+2i)\sqrt{1+4} = \underline{\sqrt{5}(1+2i)}$. □

23) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{x^2+2}$ $g(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } x \in [0, 1] \\ |x|-1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

$(g \circ f)(x) = \underset{\forall x \in \mathbb{R}}{=} g(f(x)) = \cos(f(x)) = \cos\left(\frac{1}{x^2+2}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$
 $0 < f(x) \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$



24) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} 2 - \cos x & \text{se } -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

$\inf_{\mathbb{R}} f = \underline{0}$ $\sup_{\mathbb{R}} f = \underline{3}$. □

25) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} e^{x+b^2} - e & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{2ax - \sin x}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{x+b^2} - e) = e^{b^2} - e = 0 \Leftrightarrow b^2 = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2ax - \sin x}{x} \right) = 2a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \underline{b = \pm 1, a = \frac{1}{2}}$. □

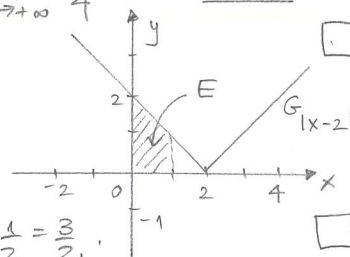
26) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x^3}{\log x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 \log x}{\log x} = \underline{3}$ (si può utilizzare anche il teorema di de l'Hopital). □

27) $f(x) = x + \cos x$ $f'(x) = 1 - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1$
 $\Leftrightarrow \underline{x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$. □

28) $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n}{4^n+1}}_{a_n} x^n$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{4^{n+1}+1} \cdot \frac{4^n+1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \Rightarrow \underline{r=4}$. □

29) $\int_0^1 |x-2| dx = \text{area } E = \underline{\frac{3}{2}}$.

oppure $\int_0^1 |x-2| dx = \int_0^1 (2-x) dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 2 - \frac{1}{2} = \underline{\frac{3}{2}}$.



210) $\int_2^{+\infty} \frac{2}{x^{3\alpha} \sqrt{x}} dx < +\infty \Leftrightarrow 3\alpha + \frac{1}{2} > 1 \Leftrightarrow \underline{\alpha > \frac{1}{6}}$. ■

b1) i) Sia $A = \{x_n = \frac{n^2-1}{4n^2} + \frac{(-1)^n}{4} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$.

Notiamo che se n è pari

$$x_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n^2}$$

$$\Rightarrow x_2 \leq x_n < \frac{1}{2}, \text{ ossia } \frac{7}{16} \leq x_n < \frac{1}{2}$$

se n è dispari

$$x_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4n^2}$$

$$\Rightarrow x_1 \leq x_n < 0, \text{ ossia } -\frac{1}{4} \leq x_n < 0.$$

Quindi, $-\frac{1}{4} \leq x_n < \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, ossia l'insieme A è limitato. $\square$

ii) Notiamo che $x_1 \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Quindi $\inf A = \min A = -\frac{1}{4}$.

D'altra parte, $x_n < \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Quindi $\frac{1}{2}$ è un maggiorante di

A . Proviamo che è il più piccolo dei maggioranti di A , ossia, fissato

$\varepsilon > 0$ arbitrario, $\exists n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, n pari tale che $\frac{1}{2} - \varepsilon < x_n$, ossia

$$\frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{1}{2} - \frac{1}{4n^2}, \text{ ossia } \varepsilon > \frac{1}{4n^2}.$$

Dalla proprietà archimedeica dei nr. reali segue che $\exists n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ tale che $\varepsilon > \frac{1}{4n} \left(\geq \frac{1}{4n^2} \right)$. Se n è pari, si ha

concluso, altrimenti basta prendere $n+1$. Quindi $\sup A = \frac{1}{2}$. $\blacksquare$

b2) Ricordiamo che $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$ per $t \rightarrow 0$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3) \text{ per } t \rightarrow 0.$$

Posto $a_n = \left[e^{\frac{2}{n}} - 1 - \sin\left(\frac{3d}{n}\right) \right] n^{\alpha-\frac{1}{3}}$, abbiamo quindi

$$\begin{aligned} a_n &= \left[\cancel{1} + \frac{2}{n} + \frac{4}{2n^2} + \frac{8}{3!n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \cancel{1} - \frac{3d}{n} + \frac{27d^3}{3!n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right] n^{\alpha-\frac{1}{3}} \\ &= \left[\frac{2-3d}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{8+27d^3}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right] n^{\alpha-\frac{1}{3}} \quad \begin{array}{l} \text{per } n \rightarrow +\infty \\ \text{per } n \rightarrow +\infty \end{array} \end{aligned}$$

Se $2-3d \neq 0$, ossia $d \neq \frac{2}{3}$, si ha $a_n \sim \frac{2-3d}{n} \cdot n^{\alpha-\frac{1}{3}} =$

$$= \frac{2-3d}{n^{\frac{4}{3}-d}} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Se $2-3d = 0$, ossia $d = \frac{2}{3}$, si ha $a_n \sim \frac{2}{n^2} \cdot n^{\alpha-\frac{1}{3}} \text{ per } n \rightarrow +\infty$

$$= \frac{2}{n^{2-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{2}{n^{\frac{5}{3}}} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata segue che per $\alpha \neq \frac{2}{3}$, la serie data risulta convergente se e solo se $\frac{4}{3} - \alpha > 1$, ossia $\alpha < \frac{1}{3}$; inoltre, per $\alpha = \frac{2}{3}$, la serie è convergente, poiché $a_n \sim \frac{2}{n^{5/3}}$ per $n \rightarrow +\infty$ e $\frac{5}{3} > 1$.
In conclusione, la serie data è convergente per $\alpha < \frac{1}{3}$ e $\alpha = \frac{2}{3}$.

b3) i) $f(x) = \frac{1}{(x-1)\sqrt{|x|}}$ • $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ • nessuna simmetria evidente.

• segue $\frac{-}{-1} \frac{-}{0} \frac{-}{1} \frac{+}{+} f$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ $y=0$ asint. orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$ (per $x \rightarrow +\infty$).

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ $x=0$ asint. verticale per f (da sinistra e da destra).

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ $x=1$ asint. verticale per f (da sinistra e da destra).

• f è continua nel dom f .

• $\text{dom } f' = \text{dom } f$

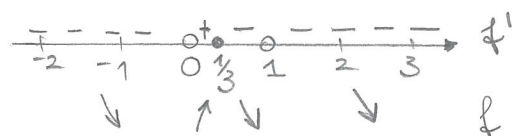
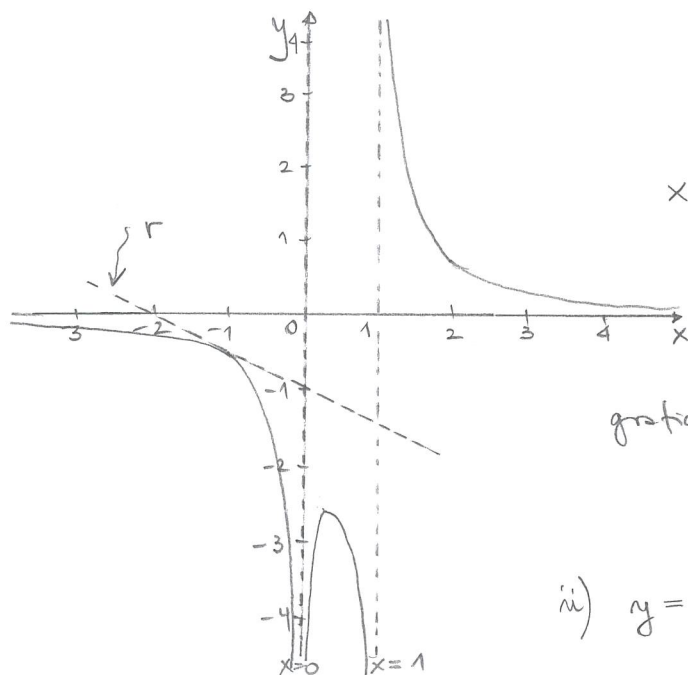
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)\sqrt{-x}} & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{(x-1)\sqrt{x}} & \text{se } x > 0, x \neq 1 \end{cases}$$

Risulta

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-\left(\sqrt{-x} + (x-1)\frac{-1}{2\sqrt{-x}}\right)}{(x-1)^2(\sqrt{-x})^2} & \text{se } x < 0 \\ \frac{-\left(\sqrt{x} + (x-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x-1)^2(\sqrt{x})^2} & \text{se } x > 0, x \neq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3x-1}{2(x-1)^2(\sqrt{-x})^3} & \text{se } x < 0 \\ \frac{-3x+1}{2(x-1)^2(\sqrt{x})^3} & \text{se } x > 0, x \neq 1 \end{cases}$$

Risulta $f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{3}$ pt. critico per f ; $f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$
 ≈ -2.6



$x = \frac{1}{3}$ pt. di max. loc. stretto per f

grafico qualitativo di f .

□

ii) $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ con $x_0 = -1$

Abbiamo $f(-1) = -\frac{1}{2}$ $f'(-1) = \frac{-4}{2 \cdot (-1) \cdot 1} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x + 1) \Rightarrow \underline{\underline{y = -\frac{1}{2}x - 1.}}$

□

iii) $\int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 \frac{1}{(x-1)\sqrt{x}} dx$

ora $\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x}} dx \xrightarrow{\sqrt{x}=t, x=t^2, dx=2t dt} \int \frac{2t}{(t^2-1)t} dt = \int \frac{1}{t-1} dt - \int \frac{1}{t+1} dt$

$= \log|t-1| - \log|t+1| + C = \log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$
 $= \log\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right| + C \quad C \in \mathbb{R}.$

Quindi $\int_2^3 \frac{1}{(x-1)\sqrt{x}} dx = \left[\log\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right| \right]_2^3 = \underline{\underline{\log\left|\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right| - \log\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|.}}$

■

b4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \log(1+\sin t) dt}{x^k} = \frac{0}{0}$

Oss. che dal teorema fond. del calcolo integrale segue

$\frac{\left(\int_0^x \log(1+\sin t) dt\right)'}{(x^k)'} = \frac{\log(1+\sin x)}{k x^{k-1}} = \frac{\log(1+\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{k x^{k-1}}$

Poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sinh x}{k x^{k-1}} = \begin{cases} 0 & \text{se } k=1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } k=2 \\ +\infty & \text{se } k \geq 3, \end{cases}$$

dal teorema di de L'Hopital segue che il limite dato esiste e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \log(1+\sinh t) dt}{x^k} = \begin{cases} 0 & \text{se } k=1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } k=2 \\ +\infty & \text{se } k \geq 3. \end{cases}$$

b5) i) $f(x) = x^3 - x^5 + x$ è una funzione continua su $[-1, 1]$ e derivabile su $] -1, 1 [$. □

ii) Dobbiamo trovare tutti i pr. $c \in [-1, 1]$: $\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = f'(c)$.

Poiché $f'(x) = 3x^2 - 5x^4 + 1$, dobbiamo trovare

tutti i pr. $c \in [-1, 1]$:

$$\frac{1 - (-1)}{1 - (-1)} = 3c^2 - 5c^4 + 1,$$

$$\text{ovvia } 1 = 3c^2 - 5c^4 + 1,$$

$$\text{ovvia } 0 = 3c^2 - 5c^4 \Rightarrow \underline{\underline{c=0, c_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{3}{5}}}}.$$

b6) i) $f: A \rightarrow B$ è iniettiva in A se $\forall x_1, x_2 \in A$,

$$[(x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))], \text{ o equivalentemente, se } \forall x_1, x_2 \in A, [(f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)].$$

ii) Provate che $\sqrt{2}$ è irrazionale. ■