

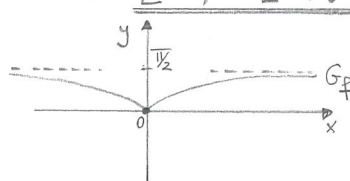
Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
 CdL in Informatica - CdL in Ingegneria dell'Informazione e delle Comunicazioni
 CdL in Ingegneria dell'Informazione e Organizzazione d'Impresa
 ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1
 a.a. 2016-2017 - Trento, 19 giugno 2017

FILA (A)

21) $A = \{x_n = \frac{\cos n\pi}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\} = \{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ $\min A = -1, \max A = \frac{1}{2}$. $\square$

22) $\operatorname{Im} \left(\frac{1+i}{1-i} \right)$ $\frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+2i-1}{1+1} = \frac{2i}{2} \Rightarrow \operatorname{Im} \left(\frac{1+i}{1-i} \right) = \underline{\underline{1}}$. $\square$

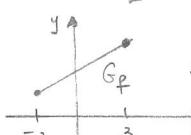
23) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x-3}$ $\operatorname{dom} f = [-1, +\infty[\setminus \{3\}$. $\square$

24) $f(x) = \operatorname{arctg}(|x|)$  $\inf_{\mathbb{R}} f = 0$ $\sup_{\mathbb{R}} f = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$. $\square$

25) $a_n = \arcsin \left(-\frac{1}{n+1} \right)$ $\frac{1}{n+1} \downarrow \Rightarrow -\frac{1}{n+1} \uparrow \Rightarrow \arcsin \left(-\frac{1}{n+1} \right) \uparrow$. $\square$
 poiché $\arcsin x \uparrow$

26) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n} \right)^{3n}$ $\left(1 - \frac{2}{n} \right)^{3n} = e^{3n \log \left(1 - \frac{2}{n} \right)} = e^{3n \left(-\frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \underline{\underline{e^{-6}}}$. $\square$

27) $f: [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Per il teorema di Weierstrass, f ammette massimo e minimo su $[-2, 3]$. Quindi $\boxed{\text{ii}}$ è vera!

i)  f non cambia segno! $\square$
 iii) la f in i) non ha pt. critico! $\square$

28) $\sum_{n=0}^{+\infty} (x^2-1)^n < +\infty \Leftrightarrow |x^2-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < x^2-1 < 1$
 $\Leftrightarrow 0 < x^2 < 2 \Rightarrow \underline{\underline{x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\setminus \{0\}}}}$. $\square$

29) $f(x) = x^3 \log x$ $F(x) = \int x^3 \log x \, dx = \frac{x^4}{4} \log x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^4}{4} \log x - \frac{x^4}{16} + C$
 $F(1) = 0 \Leftrightarrow C = \frac{1}{16}$. Quindi $\underline{\underline{F(x) = \frac{x^4}{4} \log x - \frac{x^4}{16} + \frac{1}{16}}}$.

30) $e^x - 1 = o(\sqrt{x})$ per $x \rightarrow 0^+$ è vera.

Infatti $\frac{e^x - 1}{\sqrt{x}} = \frac{e^x - 1}{x} \cdot \sqrt{x} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$. $\square$

b1) i) $z^4 = -16$: dobbiamo determinare le quattro radici quarte del numero complesso $w = -16 = 16(\cos \pi + i \sin \pi)$. Esse sono

$$z_k = \sqrt[4]{16} \left(\cos \left(\frac{\pi + 2k\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi + 2k\pi}{4} \right) \right) \text{ per } k \in \{0, 1, 2, 3\}, \text{ ossia}$$

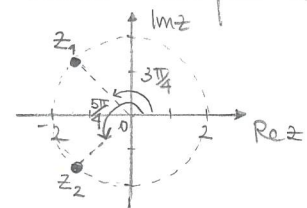
$$z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

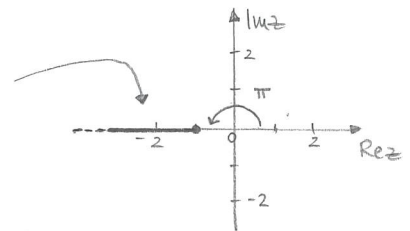
$$z_3 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

Le soluzioni del sistema $\begin{cases} z^4 = -16 \\ \arg z \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\end{cases}$ sono dunque z_1 e z_2 .

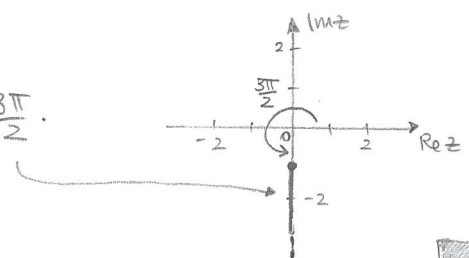


ii) Osserviamo che le soluzioni z_1 e z_2 di i) soddisfano $|z_1| = |z_2| = 2$. Allora, $w \in \mathbb{C}$ t.c.

$$\begin{cases} |w| \geq \frac{|z_1|}{2} \\ \arg w = \arg z_1 + \frac{\pi}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} |w| \geq 1 \\ \arg w = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi. \end{cases}$$

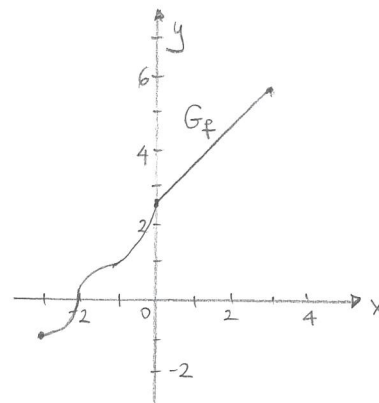


$$\text{e } \begin{cases} |w| \geq \frac{|z_2|}{2} \\ \arg w = \arg z_2 + \frac{\pi}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} |w| \geq 1 \\ \arg w = \frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

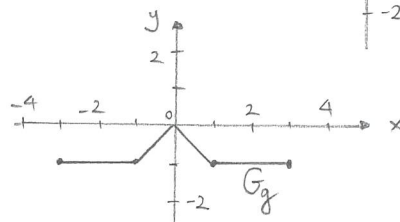


b2) i) $f, g: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+2} & \text{se } -3 \leq x < -1 \\ e^{x+1} & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ x+e & \text{se } 0 < x \leq 3, \end{cases}$$



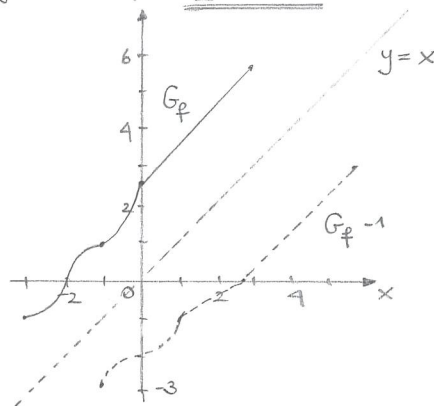
$$g(x) = \begin{cases} -|x| & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ -1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$



ii) $f([-3, 3]) = \underline{\underline{[-1, 3+e]}}$

$g([-3, 3]) = \underline{\underline{[-1, 0]}}$.

iii) $f^{-1}: [-1, 3+e] \rightarrow [-3, 3]$



iv) $(f^{-1})'(2+e) = \frac{1}{f'(2)}$
 $= \underline{\underline{1}}$.

(si può dedurre anche dal grafico di f^{-1} e dall'interpret. geometrica della derivata in un punto).

v) $(f \circ g)(x) \stackrel{\uparrow}{=} f(g(x)) = e^{g(x)+1}$
 $\forall x \in \text{dom } g, g(x) \in \text{dom } f$!
 Inoltre $\forall x \in \text{dom } g, g(x) \in [-1, 0]$

$$= \begin{cases} e^{-|x|+1} & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ e^{-1+1} & \text{se } x \in [-3, 3] \setminus [-1, 1] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^{-|x|+1} & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x \in [-3, 3] \setminus [-1, 1]. \end{cases}$$

b3) i) $f(x) = \sqrt{|x|} - x$

• $\text{dom } f = \mathbb{R}$

• Simmetrie: nessuna evidente

• Segno $\begin{array}{ccccccc} + & + & + & + & + & - & - \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \end{array} \quad f(x)$

$$= \begin{cases} \sqrt{-x} - x & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{x} - x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

~~Nono~~ asintoti obliqui per f , per $x \rightarrow -\infty$ per $x \rightarrow +\infty$.

In tutti $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = +\infty$
 e analog., $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] = +\infty$.

• ~~Nono~~ asintoti verticali, orizzontali, obliqui!

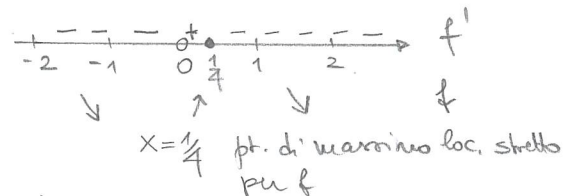
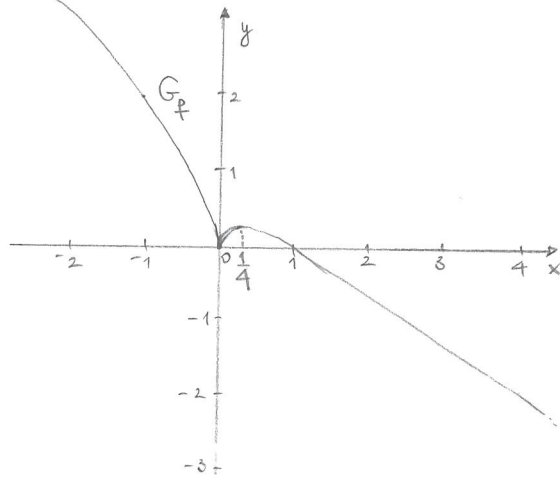
• f è continua su tutto $\mathbb{R}$ essendo composizione e somma di funzioni continue su $\mathbb{R}$.

• $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ poiché $f(x) \sim \sqrt{|x|}$ per $x \rightarrow 0$ (e risulta che in $x=0$ la funzione f presenta una cuspid).

Abbiamo $f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 & \text{se } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{-1-2\sqrt{-x}}{2\sqrt{-x}} & \text{se } x < 0 \\ \frac{1-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

Notiamo che $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -\infty$, $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$, quindi in $x=0$ la f ha una cuspidè.

Risulta inoltre $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ pt. critico per f .



$f(\frac{1}{4}) = \sqrt{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

grafico qualitativo di f .

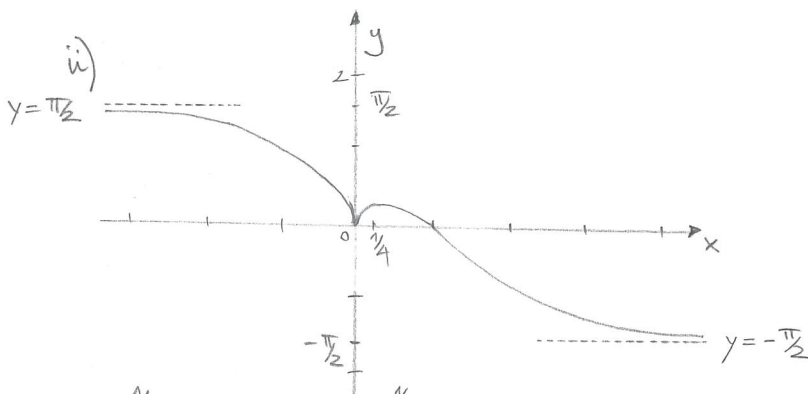


grafico qualitativo di $g(x) = \arctan f(x)$.



iii) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{f(x)} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x} - x} dx$

Abbiamo $\int \frac{1}{\sqrt{x} - x} dx \stackrel{\substack{\sqrt{x}=t \\ x=t^2 \quad dx=2t dt}}{\uparrow} \int \frac{2t}{t - t^2} dt = \int \frac{2}{1-t} dt = -2 \log|1-t| = -2 \log|1-\sqrt{x}|$

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x} - x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-2 \log|1-\sqrt{x}| \right]_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} = -2 \log|1-\frac{1}{\sqrt{2}}| = -2 \log\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)$

b4) i) Ricordiamo che $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$, quindi

$\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}} - 1}{n^{\alpha}} = \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n} + o(\frac{1}{n}) - 1}{n^{\alpha}} \sim \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ per $n \rightarrow +\infty$.

Per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata risulta che la serie data è convergente se e solo se $\alpha+1 > 1$, ossia $\alpha > 0$. □

ii) Poniamo $a_n = \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}} - 1}{n}$. Allora $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n+1}} - 1}{n+1} \cdot \frac{n}{\sqrt{1+\frac{2}{n}} - 1} =$
 $= \frac{\frac{1}{n+1} + o(\frac{1}{n+1})}{n+1} \cdot \frac{n}{\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$

Quindi la serie di potenze data ha raggio di convergenza $r=1$, e la serie converge sicuramente per $-1 < x < 1$.

Oss. che per $x=1$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}} - 1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Per il criterio del confronto asintotico con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ si ha che la serie data converge anche in $x=1$. Poiché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}} - 1}{n} (-1)^n$ è assolutamente convergente, risulta che essa è convergente. In definitiva, l'insieme di convergenza della serie data è $E = [-1, 1]$. ■

b5) $y' = \frac{-2x}{x^2+1} y + \frac{3e^x}{x^2+1}$ eq. diff. lineare del 1° ordine a coeff. variabili,
 $a(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $b(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Possiamo applicare la formula risolutiva: sia $A(x) = \int -\frac{2x}{x^2+1} = -\log(x^2+1)$;
 allora $y(x) = e^{A(x)} \left(c + \int b(x) e^{-A(x)} dx \right)$
 $= e^{-\log(x^2+1)} \left(c + \int \frac{3e^x}{x^2+1} \cdot e^{\log(x^2+1)} dx \right)$
 $= \frac{1}{x^2+1} \left(c + \int 3e^x dx \right) = \frac{1}{x^2+1} (c + 3e^x).$

Imponendo $y(0) = 1$ si ottiene $1 = c + 3$, ossia $c = -2$.

La soluzione del pbm. di Cauchy dato è quindi $y(x) = \frac{1}{x^2+1} (-2 + 3e^x)$, $x \in \mathbb{R}$. ■

b6) i) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, M > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < x-3 < \delta$
 $\Rightarrow f(x) > M$, oppure

$\forall$ intorno U di $+\infty \exists$ un intorno destro V di 3 t.c. $\forall x \in V \Rightarrow f(x) \in U$. □

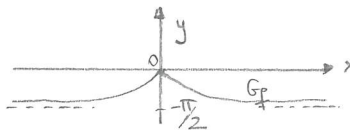
ii) Formule della derivata del prodotto di due funzioni. ■

FILA ③

21) $A = \{x_n = \frac{\cos n\pi}{n+1} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\} = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\}$ $\min A = -\frac{1}{2}, \max A = \frac{1}{3}$. □

22) $\operatorname{Im} \left(\frac{1-i}{1+i} \right)$ $\frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-2i-1}{1+1} = \frac{-2i}{2} \Rightarrow \operatorname{Im} \left(\frac{1-i}{1+i} \right) = -1$. □

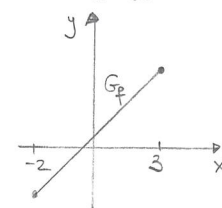
23) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x-2}$ $\operatorname{dom} f = [-1, +\infty[\setminus \{2\}$. □

24) $f(x) = -\arctg(|x|)$  $\inf_{\mathbb{R}} f = -\frac{\pi}{2}$ $\sup_{\mathbb{R}} f = 0$. □

25) $a_n = \arccos \left(1 - \frac{1}{n} \right)$ $\frac{1}{n} \downarrow \Rightarrow 1 - \frac{1}{n} \uparrow \Rightarrow \arccos \left(1 - \frac{1}{n} \right) \downarrow$.
poiché $\arccos x \downarrow$ □

26) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{n} \right)^{2n}$ $\left(1 + \frac{3}{n} \right)^{2n} = e^{2n \log \left(1 + \frac{3}{n} \right)} = e^{2n \left(\frac{3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^6$. □

27) $f: [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Per il teorema di Weierstrass, f ammette massimo e minimo su $[-2, 3]$. Quindi iii) è vera!

i)  f non ha un pt. fisso! ii) la f in i) non ha segno costante! □

28) $\sum_{n=0}^{+\infty} (|x|-1)^n < +\infty \Leftrightarrow ||x|-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < |x|-1 < 1$
 $\Leftrightarrow 0 < |x| < 2 \Rightarrow x \in]-2, 2[\setminus \{0\}$. □

29) $f(x) = xe^x$ $F(x) = \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$
 $F(0) = 1 \Leftrightarrow c = 2$. Quindi $F(x) = (x-1)e^x + 2$. □

30) $\log(1+x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0^+$ è falsa.

Infatti $\frac{\log(1+x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$ e non 0. ■

b1) i) $z^3 = -8$: dobbiamo determinare le tre radici terze del numero complesso $w = -8 = 8(\cos \pi + i \sin \pi)$. Esse sono, per $k \in \{0, 1, 2\}$,

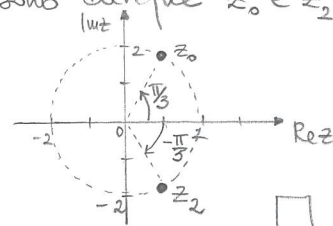
$$z_k = \sqrt[3]{8} \left(\cos \left(\frac{\pi + 2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi + 2k\pi}{3} \right) \right), \text{ ossia}$$

$$z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + \sqrt{3}i$$

$$z_1 = 2 \left(\cos \pi + i \sin \pi \right) = -2$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 - \sqrt{3}i.$$

Le soluzioni del sistema $\begin{cases} z^3 = -8 \\ \arg z \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$ sono dunque z_0 e z_2 .

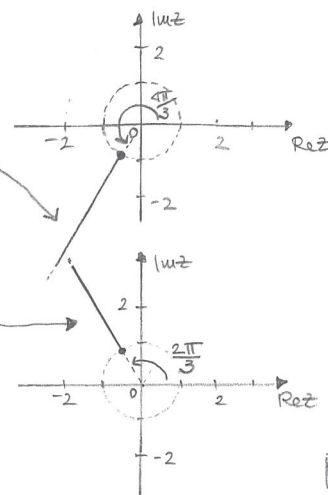


ii) Osserviamo che le soluzioni z_0 e z_2 di i)

soddisfanno $|z_0| = |z_2| = 2$. Allora, $w \in \mathbb{C}$ t.c.

$$\begin{cases} |w| \geq \frac{|z_0|}{2} \\ \arg w = \arg z_0 + \pi \end{cases} \iff \begin{cases} |w| \geq 1 \\ \arg w = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

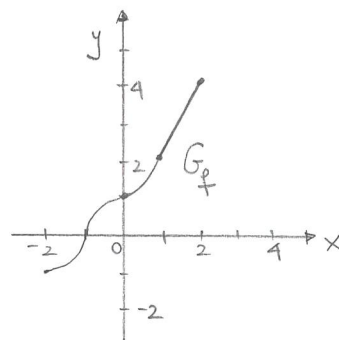
$$\text{e } \begin{cases} |w| \geq \frac{|z_2|}{2} \\ \arg w = \arg z_2 + \pi \end{cases} \iff \begin{cases} |w| \geq 1 \\ \arg w = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$



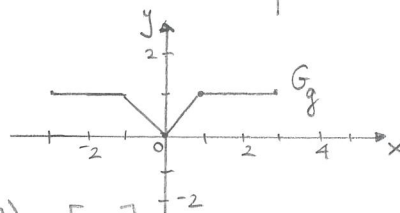
b2) $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

$g: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ 2^x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases},$$



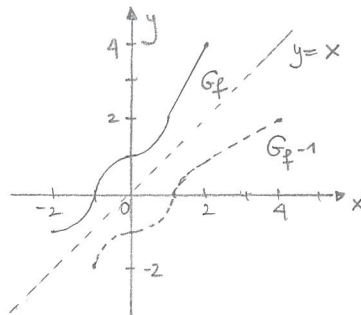
$$g(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



ii) $f([-2, 2]) = \underline{\underline{[-1, 4]}}$

$g([-3, 3]) = \underline{\underline{[0, 1]}}$

iii) $f^{-1}; [-1, 4] \rightarrow [-2, 2]$



iv) $(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(\frac{3}{2})}$
 $= \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

(si può anche dedurre dal grafico di f^{-1} e dall'interpretazione geometrica della derivata in un punto). □

v) $(f \circ g)(x) \stackrel{!}{=} f(g(x)) = 2^{g(x)} = \begin{cases} 2^{|x|} & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{se } x \in [-3, 3] \setminus [-1, 1] \end{cases}$
 $\forall x \in \text{dom } g, g(x) \in \text{dom } f!$
 Inoltre $\forall x \in \text{dom } g, g(x) \in [0, 1]$ ■

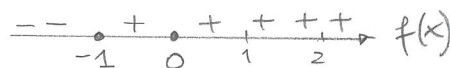
b3) i) $f(x) = \sqrt{|x|} + x$

• $\text{dom } f = \mathbb{R}$

• simmetrie: nessuna evidente.

• segno

$$= \begin{cases} \sqrt{-x} + x & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{x} + x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$



• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ $\nexists$ sono asintoti obliqui (vedi Es. analogo Fila (A))
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

• $\nexists$ sono asintoti verticali, orizzontali, obliqui.

• f è continua su tutto $\mathbb{R}$ essendo composizione e somma di funzioni continue su $\mathbb{R}$.

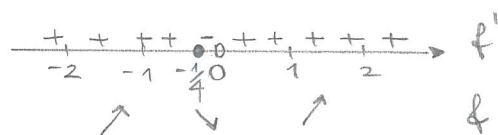
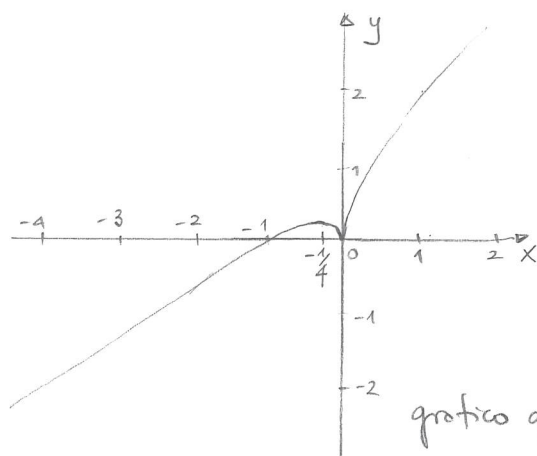
• $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ poiché $f(x) \sim \sqrt{|x|}$ per $x \rightarrow 0$ (e risulta che in $x=0$ la funzione f presenta una cuspidè).

Abbiamo

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{-x}} + 1 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1+2\sqrt{-x}}{2\sqrt{-x}} & \text{se } x < 0 \\ \frac{1+2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Notiamo che $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -\infty$, $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$, quindi in $x=0$ la f ha una cuspid.

Risulta inoltre $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -1 + 2\sqrt{-x} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$ pt. critico per f .



$x = -\frac{1}{4}$ pt. di massimo loc. diretto per f

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

grafico qualitativo di f .



ii)

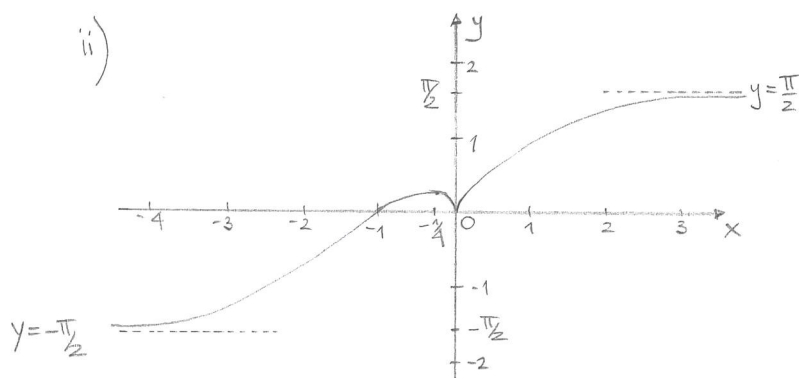


grafico qualitativo di $g(x) = \arctan f(x)$.



$$\text{iii)} \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x} + x} dx$$

$$\text{Abbiamo } \int \frac{1}{\sqrt{x} + x} dx = \int \frac{2t}{t + t^2} dt = \int \frac{2}{1+t} dt = 2 \log|1+t| = 2 \log|1+\sqrt{x}|$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x} + x} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x} + x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[2 \log|1+\sqrt{x}| \right]_{\varepsilon}^1 = \\ &= \underline{\underline{2 \log 2}} \end{aligned}$$



b4) i) Si procede come nell'Es. b4) della Fila A osservando che ora

$$\frac{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} - 1}{n^{\alpha}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{n^{\alpha}} \sim \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{n}}{n^{\alpha+1}} \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

La serie data è convergente se e solo se $\alpha > 0$.



ii) Si procede come nell'Es. 64) della Fila (A) e si ottiene che l'intervallo di convergenza della serie data è $E = [-1, 1]$. 

b5) $y' = \underbrace{\frac{-2x}{x^2+1}}_{a(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua}} y + \underbrace{\frac{3 \cos x}{x^2+1}}_{b(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua}}$ eq. diff. lineare del 1° ordine
a coeff. variabili

Possiamo applicare la formula risolutiva: sia $A(x) = \int \frac{-2x}{x^2+1} dx = -\log(x^2+1)$, allora

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{A(x)} \cdot \left(c + \int b(x) e^{-A(x)} dx \right) \quad (c \in \mathbb{R}) \\ &= e^{-\log(x^2+1)} \left(c + \int \frac{3 \cos x}{x^2+1} \cdot e^{\log(x^2+1)} dx \right) \\ &= \frac{1}{x^2+1} \left(c + \int 3 \cos x dx \right) = \frac{1}{x^2+1} (c + 3 \sin x). \end{aligned}$$

Imponendo $y(0) = 2$ si ottiene $2 = c$. La soluzione del probl. di Cauchy dato è quindi $y(x) = \frac{1}{x^2+1} (2 + 3 \sin x)$, $x \in \mathbb{R}$. 

b6) i) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}, M < 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c.}$
 $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < x - 2 < \delta \Rightarrow f(x) < M,$
 oppure
 $\forall$ intorno U di $-\infty \exists$ un intorno destro V di 2 t.c.
 $\forall x \in V$ si ha $f(x) \in U$. 

ii) Formula della derivata del prodotto di due funzioni. 