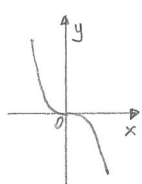


Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
 CdL in Informatica - CdL in Ingegneria dell'Informazione e delle Comunicazioni
 CdL in Ingegneria dell'Informazione e Organizzazione d'Impresa
 ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1
 a.a. 2016-2017 - Trento, 10 luglio 2017

FILA (A)

21) $A =]-3, 1] \cup \{2\}$ insieme dei pt. di acc. di $A = \underline{[-3, 1]}$. □

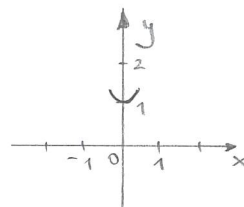
22) $z^6 + 1 = 0$ ha esattamente 6 soluzioni distinte in $\mathbb{C}$; sono le sei radici
 seste di -1 . □



23) $f(x) = |\sin x| + 2$ $0 \leq |\sin x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$; $f(\mathbb{R}) = \underline{[2, 3]}$. □

24) $f(x) = -x|x| = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 0 \\ -x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ è continua. Inoltre $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$
 f è derivabile in $x_0 = 0$ e $f'(0) = 0$. □

25) $f(x) = e^{-x^4 + x^2} = e^{x^2 + o(x^2)}$ per $x \rightarrow 0$



26) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^{1/2}}$ = $+\infty$.
 (infinitesimo positivo) □

27) $f(x) = x^2 \log x$ $f'(x) = 2x \log x + x$ $f''(x) = 2 \log x + 3$.

Risultava $P_2(x) = \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2$
 $= (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2$. □

28) $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n^2+1} - n)$ $\sqrt{n^2+1} - n \cdot \frac{\sqrt{n^2+1} + n}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1} + n} \sim \frac{1}{2n}$,
 per $n \rightarrow +\infty$.

Per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica segue che la
 serie data è divergente. □

29) $\int_{-2}^{-1} \frac{x e^x + 1}{x} dx = \int_{-2}^{-1} \left(e^x + \frac{1}{x} \right) dx = \left[e^x + \log|x| \right]_{-2}^{-1} = (e^{-1} + \log 1) - (e^{-2} + \log 2)$
 $= \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} - \log 2$. □

30) $y(x) = 2e^{-x} - x + c$ $y'(x) = -2e^{-x} - 1$. Allora $y(x)$ è soluz. di

$y' + y = 1 - x \Leftrightarrow -2e^{-x} - 1 + 2e^{-x} - x + c = 1 - x \Leftrightarrow \underline{c = 2}$. ■

b1) i) $x_n = \arcsin\left(\frac{n}{n+1}\right)$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$. Abbiamo

$0 \leq \frac{n}{n+1} \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$. Essendo $\arcsin x$ crescente su $[-1, 1]$ si ha $0 \leq \arcsin \frac{n}{n+1} \leq \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$.

Dunque $A \subset [0, \frac{\pi}{2}]$ ed è quindi limitato. $\square$

ii) Notiamo che $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \nearrow$. Essendo $\arcsin \frac{n}{n+1}$ crescente^(*), dal teorema di esistenza del limite per funzioni monotone, si ha $\inf A = \min A = x_0 = \arcsin 0 = 0$, mentre $\sup A = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{\pi}{2}$.

(*) la funzione composta di funzioni crescenti è crescente, e quindi $x_n = \arcsin \frac{n}{n+1}$ è crescente). $\blacksquare$

$$b2) \begin{cases} z^2 - \bar{z}\bar{w} - 3\operatorname{Re}z = 0 \\ \text{con } w = \bar{z} + 1 \end{cases} \Rightarrow \bar{w} = z + 1 \uparrow \begin{cases} z^2 - \bar{z}(z+1) - 3\operatorname{Re}z = 0. \end{cases}$$

Risoliamo l'eq. $z^2 - \bar{z}(z+1) - 3\operatorname{Re}z = 0$ ponendo $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Si ha $(x + iy)^2 - (x - iy)(x + 1 + iy) - 3x = 0$, ossia

$$\cancel{x^2} + 2xyi - y^2 - \cancel{x^2} - x - \cancel{xyi} + \cancel{xyi} + iy - y^2 - 3x = 0,$$

$$\text{ossia} \begin{cases} -2y^2 - 4x = 0 \\ 2xy + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0 \text{ opp. } x = -\frac{1}{2}$$

Se $y = 0$, dalla 1^a eq. del sistema risulta $x = 0$; se

$x = -\frac{1}{2}$, dalla 1^a eq. del sistema risulta $2y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm 1$.

Abbiamo allora $z = 0$

$$\underline{\underline{z = -\frac{1}{2} - i}}$$

$$\underline{\underline{z = -\frac{1}{2} + i}}$$

$$b3) i) \boxed{f(x) = x e^{(x+1)|x-2|}}$$

• $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$

• nessuna simmetria evidente

$$= \begin{cases} x e^{(x+1)(2-x)} & \text{se } x < 2 \\ x e^{(x+1)(x-2)} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

• segno



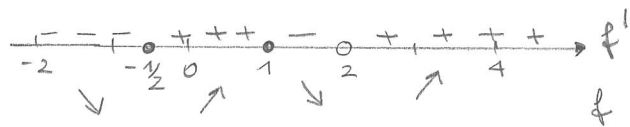
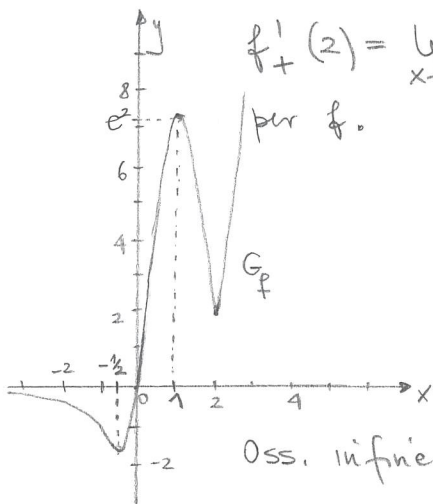
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ $y=0$ asintoto orizz. per f , per $x \rightarrow -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ($\nexists$ asintoto obliquo per f , per $x \rightarrow +\infty$, poiché $f(x) \sim x e^{x^2}$ per $x \rightarrow +\infty$).
- f è continua su tutto $\mathbb{R}$ essendo composizione e prodotto di funzioni continue su $\mathbb{R}$.
- $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ (nota: $f(x) \sim 2e^{3|x-2|}$ per $x \rightarrow 2$; $x=2$ sarà un punto angoloso).

$$f'(x) = \begin{cases} e^{(x+1)(2-x)} + x e^{(x+1)(2-x)} (-2x+1) & \text{se } x < 2 \\ e^{(x+1)(x-2)} + x e^{(x+1)(x-2)} (2x-1) & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (-2x^2 + x + 1) e^{(x+1)(2-x)} & \text{se } x < 2 \\ (2x^2 - x + 1) e^{(x+1)(x-2)} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Ora $-2x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-4} = \frac{-1 \pm 3}{-4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$ pt. critici per f
mentre $2x^2 - x + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Inoltre, essendo f continua in $x=2$, e $f'(x)$ esiste in un intorno di $x=2$, si ha $f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-2x^2 + x + 1) e^{(x+1)(2-x)} = -5$, e $f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x^2 - x + 1) e^{(x+1)(x-2)} = 7$. Dunque $x=2$ è un pt. angoloso per f .



$x = -\frac{1}{2}$ pt. di min. loc. stretto per f ; $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} e^{\frac{5}{4}}$

$x = 1$ pt. di max loc. stretto per f ; $f(1) = e^2$.

Oss. infine che $f(2) = 2$, che risulta essere un pt. di min. loc. stretto per f . □

ii) $y = f(0) + f'(0)(x-0)$ è l'eq. della retta tg. al grafico di f nel pt $(0, f(0))$. Risulta immediatamente che $y = e^2 x$. ■

b4) i) Poiché $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, ponendo $a=1$ abbiamo che f risulta continua in $x=0$. Scriviamo allora $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x=0. \end{cases}$

Notiamo che $\forall h \neq 0 \quad \frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{\frac{\sin h}{h} - 1}{h} = \frac{\sin h - h}{h^2}.$

Quindi $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{h}{3!} + o(h) \right) = 0$. Dunque, f è derivabile in $x=0$ e $f'(0)=0$. □

ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^3} f(t) dt}{\sin x - x} = \frac{0}{0}.$

Oss. che $\frac{\left(\int_0^{x^3} f(t) dt \right)'}{(\sin x - x)'} \stackrel{\text{TFC}}{=} \frac{3x^2 \cdot \frac{\sin x^3}{x^3}}{(\cos x - 1)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2.$ Dal teorema

di de l'Hopital segue allora che anche il limite dato esiste e vale -6 ,

ossia $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^3} f(t) dt}{\sin x - x} = \underline{\underline{-6}}.$ □

iii) $\int_0^{+\infty} f^2(x) dx = \int_0^1 f^2(x) dx + \int_1^{+\infty} f^2(x) dx.$

Poiché $f^2(x): [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ è una funzione continua, risulta che essa è Riemann-integrabile su $[0, 1]$ e $\int_0^1 f^2(x) dx \in \mathbb{R}$. D'altra parte, $0 \leq \int_1^{+\infty} f^2(x) dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx < +\infty$. Quindi, per il criterio del confronto possiamo concludere che $\int_0^{+\infty} f^2(x) dx$ è convergente. ■

b5) Poniamo $a_n = \frac{|\log x|^n}{n^{3/2}}$. Abbiamo $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Notiamo che

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = |\log x|$ (ricordiamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ e dalla continuità di $x^{3/2}$ segue che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^{3/2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{n})^{3/2} = 1$).

Dal criterio della radice n -esima segue allora che la serie data converge se $|\log x| < 1$, mentre diverge se $|\log x| > 1$.

Per $|\log x| = 1$ osserviamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$. Possiamo dunque concludere che la serie data è convergente se e solo se $|\log x| \leq 1$, ossia $-1 \leq \log x \leq 1$. Ne segue che la serie converge $\forall x \in \left[\frac{1}{e}, e \right]$. ■

b6) i) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente se la successione $\{s_n\}_n$ delle somme parziali è convergente, ossia se esiste ed è finito $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$.
($s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$). □

ii) Siano $f: \text{dom } f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \text{dom } g \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.
 $g(\text{dom } g) \subset \text{dom } f$. Supponiamo che f e g siano crescenti.
Proviamo che $f \circ g$ risulta crescente.

Siano $x_1, x_2 \in \text{dom } g$, $x_1 < x_2$. Poiché g è crescente, segue
 $g(x_1) < g(x_2)$. Essendo f crescente, da $g(x_1) < g(x_2)$
 $\Rightarrow f(g(x_1)) < f(g(x_2))$, ossia $(f \circ g)(x_1) < (f \circ g)(x_2)$. □

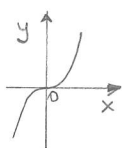
(qui crescente = strett. crescente, ossia h crescente se $x_1 < x_2 \Rightarrow h(x_1) < h(x_2)$).
Ovviamente si ha un risultato analogo se crescente = deb. crescente,
ossia h deb. crescente se $x_1 < x_2 \Rightarrow h(x_1) \leq h(x_2)$) ■

FILA (B)

21) $A =]-3, 1[\cup]4, +\infty[$ insieme dei pt. di acc. di $A = \underline{[-3, 4]}$. ☐

22) $z^4 - 1 = 0$ ha esattamente 4 soluzioni distinte in $\mathbb{C}$; sono le quattro radici quarte di 1. ☐

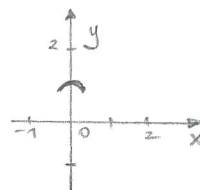
23) $f(x) = -|\sin x| - 1$ $-1 \leq -|\sin x| \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$; $f(\mathbb{R}) = \underline{[-2, -1]}$. ☐



24) $f(x) = x|x| = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ è continua. Inoltre $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$.

f è derivabile in $x_0 = 0$ e $f'(0) = 0$.

25) $f(x) = e^{x^4 - x^2} = e^{-x^2 + o(x^2)}$ per $x \rightarrow 0$



26) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \underline{-\infty}$,
infinitesimo negativo ☐

27) $f(x) = x^3 \log x$ $f'(x) = 3x^2 \log x + x^2$ $f''(x) = 6x \log x + 5x$.

Risulta $P_2(x) = \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2$
 $= (x-1) + \frac{5}{2}(x-1)^2$. ☐

28) $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3})$ $\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3} \cdot \frac{\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3}} = \frac{n^{\frac{3}{2}} + 1 - n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3}}$
 $\sim \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ per $n \rightarrow +\infty$.

Per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ con $\alpha = \frac{3}{2}$, segue che la serie data è convergente. ☐

29) $\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x + 1}{x} dx = \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \left(\cos x + \frac{1}{x} \right) dx = \left[\sin x + \log |x| \right]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} =$
 $= \left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \log \frac{\pi}{2} \right) - \left(\sin(-\pi) + \log \pi \right) = -1 + \log \frac{\pi}{2} - \log \pi$
 $= -1 + \log \pi - \log 2 - \log \pi = \underline{-1 - \log 2}$. ☐

30) $y(x) = 2e^{-x} + x + c$ $y'(x) = -2e^{-x} + 1$. Allora $y(x)$ è soluz. di $y' + y = 3 + x$
 $\Leftrightarrow -2e^{-x} + 1 + 2e^{-x} + x + c = 3 + x \Leftrightarrow \underline{c = 2}$. ☒

b1) i) $x_n = \arccos\left(\frac{n}{n+1}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$. Abbiamo $0 \leq \frac{n}{n+1} \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$. Essendo $\arccos x$ decrescente su $[-1, 1]$ si ha

$$\frac{\pi}{2} = \arccos 0 \geq \arccos\left(\frac{n}{n+1}\right) \geq \arccos 1 = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \text{ Dunque } A \subset [0, \frac{\pi}{2}] \text{ ed } \bar{A} \text{ quindi limitato.} \quad \square$$

ii) Notiamo che $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \nearrow$. Essendo $\arccos \frac{n}{n+1}$ decrescente, ^(*) dal teorema di esistenza del limite per funzioni monotone, si ha $\inf A = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$, mentre $\sup A = \max A = x_0 = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

(*) la funzione composta di una funzione crescente con una funzione decrescente è una funzione decrescente, e quindi $x_n = \arccos \frac{n}{n+1}$ è decrescente). ■

$$b2) \begin{cases} \bar{z}^2 + z\bar{w} - (\operatorname{Im} z)^2 = 0, \\ \text{dove } \bar{w} = z+1 \end{cases} \Rightarrow w = \bar{z}+1 \quad \uparrow \quad \bar{z}^2 + z(\bar{z}+1) - (\operatorname{Im} z)^2 = 0.$$

Risolviamo l'eq. $\bar{z}^2 + z(\bar{z}+1) - (\operatorname{Im} z)^2 = 0$ ponendo $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Si ha $(x - iy)^2 + (x + iy)(x + 1 - iy) - y^2 = 0$, ossia

$$x^2 - 2xyi - y^2 + x^2 + x + iy + y^2 - y^2 = 0,$$

$$\text{ossia } \begin{cases} 2x^2 - y^2 + x = 0 \\ -2xy + y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \text{ opp. } x = \frac{1}{2}.$$

Se $y = 0$, la 1^a eq. del sistema risulta $x(2x+1) = 0$, da cui

$$x = 0 \text{ opp. } x = -\frac{1}{2}.$$

Se $x = \frac{1}{2}$, dalla 1^a eq. del sistema risulta $y^2 = 1$, ossia $y = \pm 1$.

Abbiamo allora $z = 0$

$$\underline{\underline{z = -\frac{1}{2}}}$$

$$\underline{\underline{z = \frac{1}{2} - i}}$$

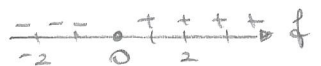
$$\underline{\underline{z = \frac{1}{2} + i}}.$$
■

b3) i) $f(x) = x e^{(x+2)|x-1|}$

$$= \begin{cases} x e^{(x+2)(1-x)} & \text{se } x < 1 \\ x e^{(x+2)(x-1)} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

• $\text{dom } f = \mathbb{R}$

• nessuna simmetria evidente

• segno 

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

$y=0$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

(~~non~~ asintoto obliquo per f , per $x \rightarrow +\infty$, poiché $f(x) \sim x e^{x^2}$ per $x \rightarrow +\infty$).

• f è continua su tutto $\mathbb{R}$ essendo composizione e prodotto di funzioni continue su $\mathbb{R}$.

• $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (nota: $f(x) \sim e^{3|x-1|}$ per $x \rightarrow 1$; $x=1$ sarà un pt. angoloso).

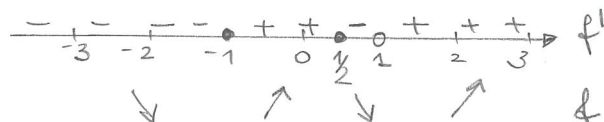
$$f'(x) = \begin{cases} e^{(x+2)(1-x)} + x e^{(x+2)(1-x)} (-2x-1) & \text{se } x < 1 \\ e^{(x+2)(x-1)} + x e^{(x+2)(x-1)} (2x+1) & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (-2x^2 - x + 1) e^{(x+2)(1-x)} & \text{se } x < 1 \\ (2x^2 + x + 1) e^{(x+2)(x-1)} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Ora $-2x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-4} = \frac{1 \pm 3}{-4} = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$ pt. critici per f

mentre $2x^2 + x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

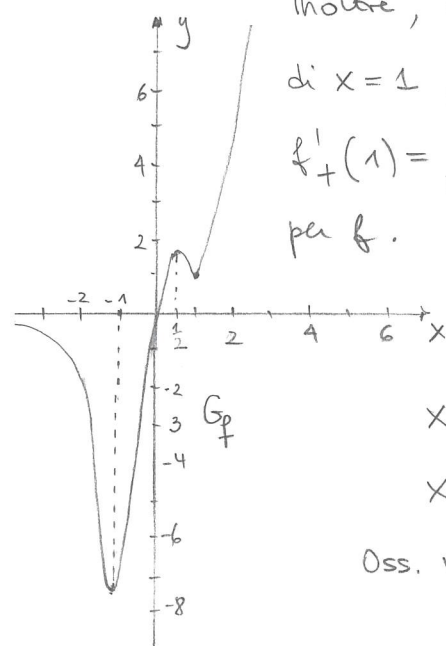
Inoltre, essendo f continua in $x=1$, e $f'(x)$ esiste in un intorno di $x=1$, si ha $f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2x^2 - x + 1) e^{(x+2)(1-x)} = -2$, e $f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x^2 + x + 1) e^{(x+2)(x-1)} = 4$. Dunque $x=1$ è un pt. angoloso per f .



$x = -1$ pt. di min. loc. stretto per f ; $f(-1) = -e^2$

$x = \frac{1}{2}$ pt. di max. loc. stretto per f ; $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} e^{+5/4}$

Oss. infine che $f(1) = 1$, che risulta essere un pt. di min. loc. stretto per f . $\square$



ii) $y = f(0) + f'(0)(x-0)$ è l'eq. della retta tg al grafico di f nel pt. $(0, f(0))$. Risultava immediatamente che $y = e^2 x$. ■

b4) i) Poiché $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$, ponendo $a = -\frac{1}{2}$ abbiamo che f risulta continua in $x=0$.

Scriviamo allora
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Notiamo che $\forall h \neq 0$
$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\frac{\cos h - 1}{h^2} + \frac{1}{2}}{h} = \frac{\cos h - 1 + \frac{h^2}{2}}{h^3}.$$

Quindi
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^4}{4!} + o(h^4)}{h^3} = 0.$$
 Dunque, f è derivabile in $x=0$ e $f'(0)=0$. □

ii)
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} f(t) dt}{e^x - 1 - x} = \frac{0}{0}$$

Oss. che
$$\frac{\left(\int_0^{x^2} f(t) dt\right)'}{(e^x - 1 - x)'} \stackrel{\text{TFC}}{=} \frac{2x \cdot \frac{(\cos x^2 - 1)}{x^4}}{(e^x - 1 - x)'} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

Del teorema di de l'Hopital segue allora che anche il limite dato esiste e vale -1 , ossia
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} f(t) dt}{e^x - 1 - x} = -1.$$
 □

iii)
$$\int_0^{+\infty} |f(x)| dx = \int_0^1 |f(x)| dx + \int_1^{+\infty} |f(x)| dx.$$

Poiché $|f(x)|: [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ è una funzione continua, risulta che essa è Riemann-integrabile su $[0, 1]$ e $\int_0^1 |f(x)| dx \in \mathbb{R}$. D'altra parte,

$$0 \leq \int_1^{+\infty} |f(x)| dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2} dx < +\infty.$$
 Quindi, per il criterio del

confronto possiamo concludere che $\int_0^{+\infty} |f(x)| dx$ è convergente. ■

b5) Si procede come nell'es. b5) Fila (A). La serie data risulta

convergente se e solo se $|\log(2x)| \leq 1$, ossia $-1 \leq \log(2x) \leq 1$,

ossia $e^{-1} \leq 2x \leq e$. Ne segue che la serie converge $\forall x \in \left[\frac{1}{2e}, \frac{e}{2}\right]$. ■

b6) i) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è divergente positivamente se la successione $\{s_n\}_n$ delle somme parziali è divergente positivamente, ossia se $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$ (ricordiamo che $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$)

ii) vedi Es. b6) ii) Fila (A). □

