

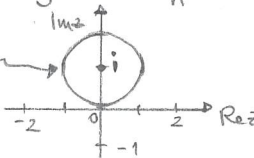
Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
 CdL in Informatica - CdL in Ingegneria dell'Informazione e delle Comunicazioni
 CdL in Ingegneria dell'Informazione e Organizzazione d'Impresa
 ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1
 a.a. 2016-2017 - Trento, 16 settembre 2017

FILA A)

21) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x|(x^2 - 2x - 3) < 0\} = \{x \in \mathbb{R} : |x|(x-3)(x+1) < 0\} =]-1, 3[\setminus \{0\}$.

A non è un intervallo. □

22) $A = \{x_n = -\frac{1}{\log n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$; $x_n \uparrow \Rightarrow \underline{\inf A = x_2 = -\frac{1}{\log 2}} \quad \underline{\sup A = 0}$. □

23) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 1\}$  □

24) $f(x) = 1 - 3 \log x$ $y = 1 - 3 \log x \Leftrightarrow 3 \log x = 1 - y \Leftrightarrow \log x = \frac{1-y}{3}$
 $\Rightarrow x = e^{\frac{1-y}{3}} \Rightarrow \underline{f^{-1}(x) = e^{\frac{1-x}{3}}}$. □

25) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{3n^2 + n^6} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{(3^n)^n + n^6} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{3^n}\right)^n = \underline{0}$. □

26) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x^2}$ Oss. che $f(x) \sim \frac{2}{x}$ per $x \rightarrow 0$; quindi $x=0$ è un asintoto verticale per f . □

27) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^2} & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ ax + 1 & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$ $f(0) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad \forall a \in \mathbb{R}$
 quindi f è continua in $x=0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

Abbiamo $f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{(x-1)^3} & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ a & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$. Essendo f continua in $x=0$
 e $f'(x)$ esiste in un intorno di $x=0$, $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{2}{(x-1)^3} = +2$, $f'_+(0) = a$.
 f risulta derivabile in $x=0$ se $a=+2$. □

28) $\sum_{n=1}^{+\infty} n \arctan \frac{1}{n^{4\alpha}}$ $n \arctan \frac{1}{n^{4\alpha}} \sim n \cdot \frac{1}{n^{4\alpha}} = \frac{1}{n^{4\alpha-1}}$ per $n \rightarrow +\infty$.

Per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, la serie data è convergente se e solo se $4\alpha - 1 > 1$, ossia $\alpha > \frac{1}{2}$. □

29) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt[4]{x}\}$ $\text{area } E = \int_0^1 \sqrt[4]{x} dx = \left[\frac{x^{5/4}}{5/4} \right]_0^1 = \underline{\frac{4}{5}}$. □

30) $y' = \sin^2 x \cos x \Leftrightarrow y(x) = \int \sin^2 x \cos x dx \Leftrightarrow \underline{y(x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C, C \in \mathbb{R}}$. ■

b1) Dobbiamo risolvere la diseq. $\operatorname{Re}\left(\frac{z+1}{z-i}\right) \leq 1$.

Oss. che deve essere $z \neq i$. Inoltre, ponendo $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{z+1}{z-i} &= \frac{(x+1) + iy}{x + i(y-1)} \cdot \frac{x - i(y-1)}{x - i(y-1)} = \\ &= \frac{x(x+1) - (x+1)(y-1)i + xyi + y(y-1)}{x^2 + (y-1)^2} = \\ &= \frac{x(x+1) + y(y-1) + i(xy - (x+1)(y-1))}{x^2 + (y-1)^2}. \end{aligned}$$

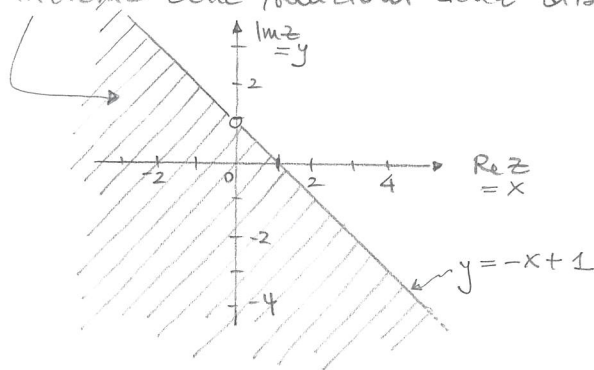
$$\text{Allora } \operatorname{Re}\left(\frac{z+1}{z-i}\right) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x(x+1) + y(y-1)}{x^2 + (y-1)^2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x(x+1) + y(y-1) \leq x^2 + (y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x^2} + x + \cancel{y^2} - y \leq \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 2y + 1$$

$$\Leftrightarrow y \leq -x + 1.$$

Tenendo conto anche che $z \neq i$, abbiamo la seg. rappresentazione grafica dell'insieme delle soluzioni della diseq. data:



$$\begin{aligned} b2) \quad f_\alpha(x) &= e^{x - \frac{1}{3}x^2} - 1 - x^\alpha = 1 + x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}x^2\right)^2 + o(x^2) - 1 - x^\alpha \\ &= x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - x^\alpha \quad \text{per } x \rightarrow 0; \end{aligned}$$

$$g(x) = \sqrt[3]{1+x^2} - 1 = 1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2) - 1 = \frac{1}{3}x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

(ricordate che $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \rightarrow 0$,

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t) \quad \text{per } t \rightarrow 0).$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_\alpha(x)}{\beta g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \frac{1}{6}x^2 + o(x^2) - x^\alpha}{\beta \cdot \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\begin{matrix} \alpha = 1 \\ \beta = \frac{1}{2} \end{matrix}}.$$

b3) i) $f(x) = e^{\frac{x}{1-|x|}}$

$$= \begin{cases} e^{\frac{x}{1+x}} & \text{se } x < 0, x \neq -1 \\ e^{\frac{x}{1-x}} & \text{se } x \geq 0, x \neq 1 \end{cases}$$

- $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$
- nessuna simmetria evidente
- sempre positiva!

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = e$ $y = e$ asintoto orizz. per f , per $x \rightarrow -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ $\left(e^{\frac{x}{1+x}} = e^{\frac{-1}{\text{infinitesimo neg.}}} \xrightarrow{x \rightarrow -1^-} +\infty \right)$

$x = -1$ asintoto verticale (da sinistra) per f

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0$ $\left(e^{\frac{x}{1+x}} = e^{\frac{-1}{\text{infinitesimo pos.}}} \xrightarrow{x \rightarrow -1^+} 0 \right)$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ $\left(e^{\frac{x}{1-x}} = e^{\frac{1}{\text{infinitesimo pos.}}} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty \right)$

$x = 1$ asintoto verticale (da sinistra) per f

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$ $\left(e^{\frac{x}{1-x}} = e^{\frac{1}{\text{infinitesimo neg.}}} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 0 \right)$

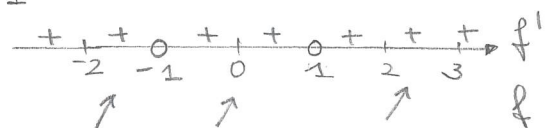
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^{-1}$ $y = \frac{1}{e}$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow +\infty$.

- f è continua su $\text{dom } f$ essendo rapporto e composizione di funzioni continue.
- $\text{dom } f' = \text{dom } f$

$$f'(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{1+x}} \cdot \frac{(1+x) - x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} \cdot e^{\frac{x}{1+x}} & \text{se } x < 0, x \neq -1 \\ e^{\frac{x}{1-x}} \cdot \frac{(1-x) + x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \cdot e^{\frac{x}{1-x}} & \text{se } x > 0, x \neq 1 \end{cases}$$

si ha $f'_-(0) = f'_+(0) = 1$. Oss. che $f'(x) > 0 \forall x \in \text{dom } f$.

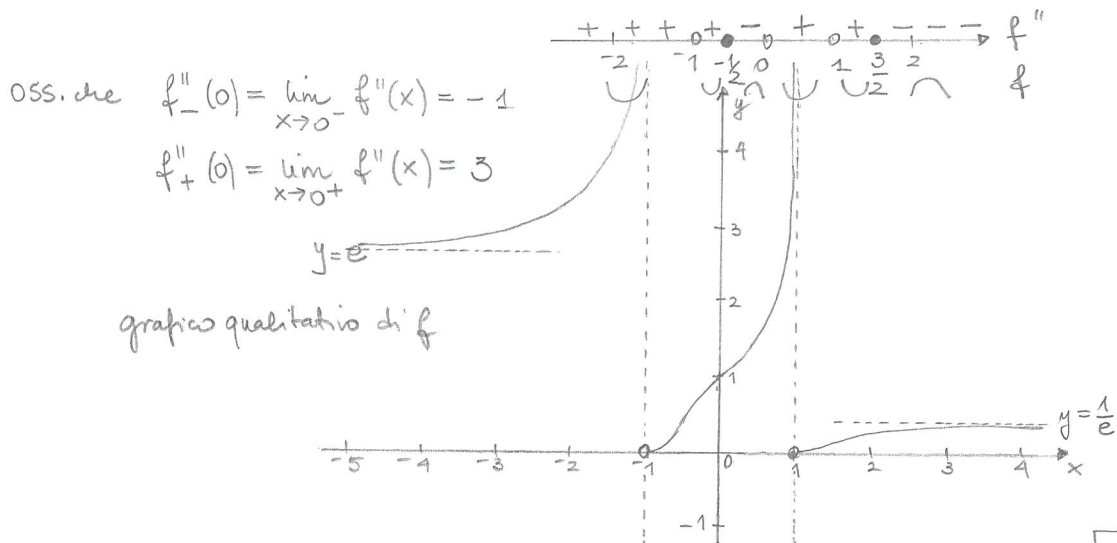
Inoltre $\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 0$



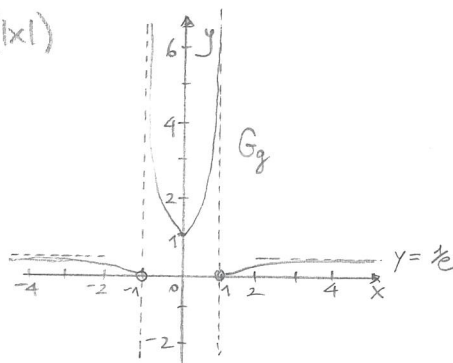
- (facoltativo) $\text{dom } f'' = \text{dom } f \setminus \{0\}$

$$f''(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{1+x}} \left[\frac{1}{(1+x)^3} - \frac{2(1+x)}{(1+x)^4} \right] & \text{se } x < 0, x \neq -1 \\ e^{\frac{x}{1-x}} \left[\frac{1}{(1-x)^3} + \frac{2(1-x)}{(1-x)^4} \right] & \text{se } x > 0, x \neq 1 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{1+2x}{(1+x)^4} e^{\frac{x}{1+x}} & \text{se } x < 0, x \neq -1 \\ \frac{3-2x}{(1+x)^4} e^{\frac{x}{1-x}} & \text{se } x > 0, x \neq 1 \end{cases}$$



ii) $g(x) = f(|x|)$



Se $k \leq 0$ Sono soluz. dell'eq. $g(x) = k$
 $0 < k < \frac{1}{e}$ Sono 2 soluz.
 $\frac{1}{e} \leq k < 1$ Sono soluz. dell'eq. "
 $k = 1$ $\exists$ una soluz. "
 $k > 1$ Sono 2 soluz. "

b4) $g(x) = \frac{\log 2x}{x}$ $x > \frac{e}{2}$: allora $g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log 2x}{x^2} = \frac{1 - \log 2x}{x^2}$

Allora $g'(x) < 0$ se $x > \frac{e}{2}$ e quindi $g(x)$ è decrescente su $[\frac{e}{2}, +\infty[$. $\square$

ii) Sia $a_n = \frac{\log 2n}{n}$. Allora $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\log 2(n+1)}{n+1} \cdot \frac{n}{\log 2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Allora il raggio di convergenza della serie data è $r=1$. Possiamo allora afferire che $\forall x \in]-1, 1[$ la serie data è convergente.

Se $x = -1$, abbiamo $\sum_{n=3}^{+\infty} \underbrace{\frac{\log 2n}{n}}_{a_n} (-1)^n$. Poichè $a_n > 0$, $a_n \searrow 0$, per il criterio di Leibniz, tale serie è convergente.

Se $x = 1$, abbiamo $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\log 2n}{n}$. Ora basta osservare che $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\log 2n}{n} > \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\log 6}{n}$.

Poichè $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, per il criterio del confronto possiamo concludere che $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\log 2n}{n} = +\infty$.

In definitiva, la serie di potenze data è convergente $\forall x \in [-1, 1[$, ossia

l'intervallo di convergenza della serie $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log 2n}{n} x^n$ è $E = [-1, 1[$. $\blacksquare$

b5) Risolviamo prima l'eq. omogenea $y'' - 4y' + 3y = 0$. L'eq. caratteristica associata $z^2 - 4z + 3 = 0$ ha due soluz. reali distinte $z_1 = 1, z_2 = 3$

e quindi la soluzione generale dell'eq. diff. omogenea è

$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Poiché $z=2$ non è soluzione della equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione diff.

$y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$ della forma $\bar{y}(x) = h e^{2x}$ con $h \in \mathbb{R}$ da determinare imponendo che $\bar{y}'' - 4\bar{y}' + 3\bar{y} = e^{2x}$. Ora

$$\bar{y}'(x) = 2h e^{2x}, \quad \bar{y}''(x) = 4h e^{2x},$$

$$\text{e quindi } \bar{y}'' - 4\bar{y}' + 3\bar{y} = e^{2x} \Leftrightarrow 4h e^{2x} - 8h e^{2x} + 3h e^{2x} = e^{2x} \Leftrightarrow -h e^{2x} = e^{2x}$$

$\Leftrightarrow h = -1$. Quindi, tutte le soluzioni dell'eq. diff. data sono

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x} - e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Le condizioni iniziali danno origine alle due condizioni $c_1 + c_2 - 1 = 0$ e

$c_1 + 3c_2 - 2 = 1$, cioè $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$. La soluzione del problema di

Cauchy è $y(x) = e^{3x} - e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$. ▀

b6) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. f è derivabile in $x=1$ se il limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

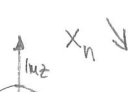
esiste ed è finito. □

ii) Enunciato e dimostrazione del Criterio della radice n-esima per serie a termini non-negativi. ▀

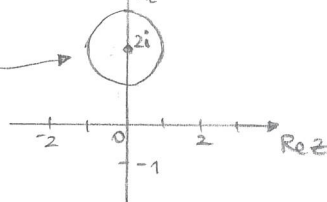
FILA (B)

21) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x - 5 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : (x-5)(x+1) > 0\} =]-\infty, -1[\cup]5, +\infty[.$

A non è un intervallo. □

22) $A = \{x_n = \frac{1}{\log n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$  $\Rightarrow \inf A = 0$ $\sup A = x_2 = \frac{1}{\log 2}.$

23) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| = 1\}$



□

24) $f(x) = 1 + 2 \log x$ $y = 1 + 2 \log x \Leftrightarrow 2 \log x = y - 1 \Leftrightarrow \log x = \frac{y-1}{2}$
 $\Rightarrow x = e^{\frac{y-1}{2}} \Rightarrow \underline{f^{-1}(x) = e^{\frac{x-1}{2}}}.$ □

25) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n^2} + n^8}{n^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2^n)^n + n^8}{n^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2^n}{n}\right)^n = +\infty$ □

26) $f(x) = \frac{e^{-x} - e^x}{x}$ Oss. che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x+o(x) - 1-x+o(x)}{x} = -2;$
 quindi $x=0$ non è un asintoto verticale per f . □

27) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ ax+1 & \text{se } 0 < x \leq 3 \end{cases}$ $f(0) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad \forall a \in \mathbb{R}$

quindi f è continua in $x=0 \quad \forall a \in \mathbb{R}.$

Abbiamo $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x+1}} & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ a & \text{se } 0 < x \leq 3. \end{cases}$ Essendo f continua in $x=0$ e

$f'(x)$ esiste in un intorno di $x=0$, $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2}$, $f'_+(0) = a.$

f risulta derivabile in $x=0$ se $a = \frac{1}{2}.$ □

28) $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n^{3\alpha}}$ $n \sin \frac{1}{n^{3\alpha}} \sim n \cdot \frac{1}{n^{3\alpha}} = \frac{1}{n^{3\alpha-1}}$ per $n \rightarrow +\infty.$

Per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, la serie data è convergente se e solo se $3\alpha - 1 > 1$, ossia $\alpha > \frac{2}{3}.$ □

29) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt[3]{x}\}$ $\text{area } E = \int_0^1 \sqrt[3]{x} dx = \left[\frac{x^{4/3}}{4/3} \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}.$ □

30) $y' = \sin^3 x \cos x \Leftrightarrow y(x) = \int \sin^3 x \cos x dx \Leftrightarrow y(x) = \underline{\underline{\frac{\sin^4 x}{4} + c, c \in \mathbb{R}}}.$ □

b) Dobbiamo risolvere la diseq. $\operatorname{Re}\left(\frac{z+2}{z+i}\right) \leq 1$.

Oss. che deve essere $z \neq -i$. Inoltre, ponendo $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$

si ha

$$\begin{aligned} \frac{z+2}{z+i} &= \frac{(x+2) + iy}{x + i(y+1)} \cdot \frac{x - i(y+1)}{x - i(y+1)} = \\ &= \frac{x(x+2) - (x+2)(y+1)i + xyi + y(y+1)}{x^2 + (y+1)^2} = \\ &= \frac{x(x+2) + y(y+1) + i(xy - (x+2)(y+1))}{x^2 + (y+1)^2}. \end{aligned}$$

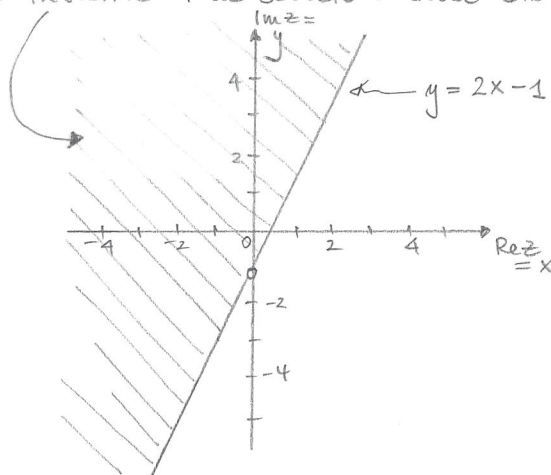
$$\text{Allora } \operatorname{Re}\left(\frac{z+2}{z+i}\right) \leq 1 \iff \frac{x(x+2) + y(y+1)}{x^2 + (y+1)^2} \leq 1$$

$$\iff x(x+2) + y(y+1) \leq x^2 + (y+1)^2$$

$$\iff \cancel{x^2} + 2x + \cancel{y^2} + y \leq \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 2y + 1$$

$$\iff y \geq 2x - 1.$$

Tenendo conto anche che $z \neq -i$, abbiamo la seg. rappresentazione grafica dell'insieme delle soluzioni della diseq. data:



$$\begin{aligned} b2) f_\alpha(x) &= \log\left(1 + x + \frac{1}{3}x^2\right) - x^\alpha = x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{3}x^2\right)^2 + o(x^2) - x^\alpha \\ &= x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x^\alpha \quad \text{per } x \rightarrow 0; \end{aligned}$$

$$g(x) = \sqrt[3]{1+x^2} - 1 = \sqrt[3]{1+x^2} - 1 = \frac{1}{3}x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

(ricordate che $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \rightarrow 0$,

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t) \quad \text{per } t \rightarrow 0).$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_\alpha(x)}{\beta g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2) - x^\alpha}{\beta \cdot \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)} = 1 \iff$$

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha &= 1 \\ \beta &= -\frac{1}{2} \end{aligned}}$$

b3)i) $f(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$

$$= \begin{cases} e^{\frac{x}{x-1}} & \text{se } x < 0, x \neq -1 \\ e^{\frac{x}{x-1}} & \text{se } x > 0, x \neq 1 \end{cases}$$

- $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$
- nessuna simmetria evidente
- sempre positiva!

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = e^{-1}$ $y = \frac{1}{e}$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0$ $\left(e^{\frac{x}{x-1}} = e^{\frac{-1}{\text{infinit. positiva}}} \rightarrow 0 \right)$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ $\left(e^{\frac{x}{x-1}} = e^{\frac{-1}{\text{infinit. neg.}}} \rightarrow +\infty \right)$ $x = -1$ asint. verticale (da destra) per f

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$ $\left(e^{\frac{x}{x-1}} = e^{\frac{1}{\text{infinit. negativa}}} \rightarrow 0 \right)$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ $\left(e^{\frac{x}{x-1}} = e^{\frac{1}{\text{infinit. positiva}}} \rightarrow +\infty \right)$ $x = 1$ asintoto verticale (da destra) per f

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e$ $y = e$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow +\infty$.

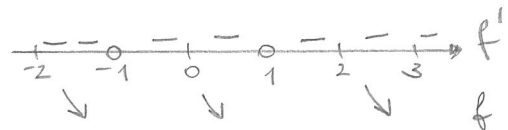
- f è continua su $\text{dom } f$ essendo rapporto e composizione di funzioni continue.

• $\text{dom } f' = \text{dom } f$

$$f'(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{x-1}} \cdot \frac{(-x-1)+x}{(-x-1)^2} = \frac{-1}{(-x-1)^2} e^{\frac{x}{x-1}} & \text{se } x < 0, x \neq -1 \\ e^{\frac{x}{x-1}} \cdot \frac{(x-1)-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2} e^{\frac{x}{x-1}} & \text{se } x > 0, x \neq 1 \end{cases}$$

Si ha $f'_-(0) = f'_+(0) = -1$. Oss. che $f'(x) < 0 \quad \forall x \in \text{dom } f$.

Inoltre $\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 0$



- (facoltativo) $\text{dom } f'' = \text{dom } f \setminus \{0\}$.

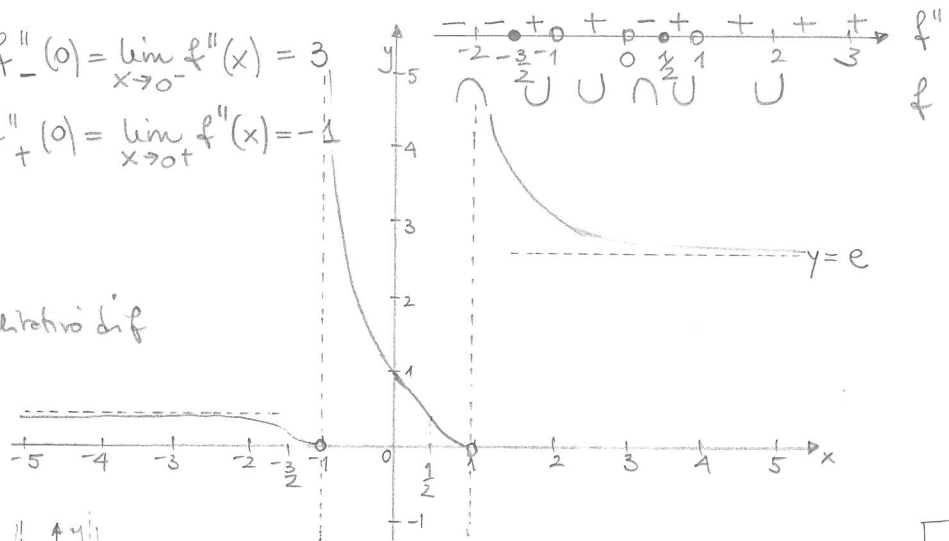
$$f''(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{x-1}} \left[\frac{1}{(-x-1)^4} - \frac{2(-x-1)}{(-x-1)^4} \right] & \text{se } x < 0, x \neq -1 \\ e^{\frac{x}{x-1}} \left[\frac{1}{(x-1)^4} + \frac{2(x-1)}{(x-1)^4} \right] & \text{se } x > 0, x \neq 1 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{(-x-1)^4} \cdot e^{-\frac{x}{x-1}} & \text{se } x < 0, x \neq -1 \\ \frac{2x-1}{(x-1)^4} \cdot e^{\frac{x}{x-1}} & \text{se } x > 0, x \neq 1 \end{cases}$$

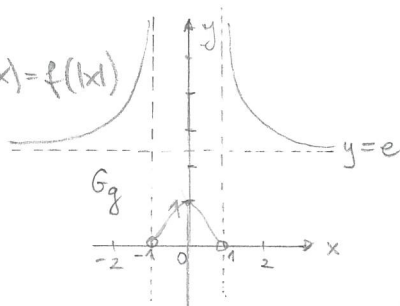
oss. che $f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f''(x) = 3$

$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f''(x) = -1$

grafico qualitativo di f



ii) $g(x) = f(|x|)$



Se $k \leq 0$ Sono soluz. dell'eq. $g(x) = k$;
 $0 < k < 1$ Sono 2 soluz. "
 $k = 1$ $\exists$ una soluzione "
 $1 < k \leq e$ Sono soluz. dell'eq. $g(x) = k$;
 $k > e$ Sono 2 soluz. "

b4) i) ii) si svolge analog. all'es. b4) Fila A.

ii) $r=1$; insieme di convergenza $E = [-1, 1[$.

b5) Risolviamo prima l'eq. omogenea $y'' - 3y' + 2y = 0$. L'eq. caratteristica associata $z^2 - 3z + 2 = 0$ ha due soluz. reali distinte $z_1 = 1$, $z_2 = 2$ e quindi la soluzione generale dell'eq. diff. omogenea è $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Poiché $z=3$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione diff. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$ della forma $\bar{y}(x) = h e^{3x}$ con $h \in \mathbb{R}$ da determinare imponendo che $\bar{y}'' - 3\bar{y}' + 2\bar{y} = e^{3x}$. Ora

$$\bar{y}'(x) = 3h e^{3x} \quad \bar{y}''(x) = 9h e^{3x},$$

$$\text{e quindi } \bar{y}'' - 3\bar{y}' + 2\bar{y} = e^{3x} \Leftrightarrow 9h e^{3x} - 9h e^{3x} + 2h e^{3x} = e^{3x} \Leftrightarrow h = \frac{1}{2}.$$

Quindi, tutte le soluzioni dell'eq. diff. data sono

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Le condizioni iniziali danno origine alle due condizioni $c_1 + c_2 + \frac{1}{2} = 0$ e $c_1 + 2c_2 + \frac{3}{2} = 1$, cioè $c_1 = -\frac{1}{2}$ e $c_2 = 0$. La soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = -\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{3x}$, $x \in \mathbb{R}$. ■

b6) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. f è derivabile in $x=0$ se il limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ esiste ed è finito. □

ii) Enunciato e dimostrazione del Criterio della radice n-esima per serie a termini non-negativi. ■