

Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione  
 CdL in Informatica, Ingegneria dell'Informazione e delle Comunicazioni  
 Ingegneria dell'Informazione e organizzazione d'impresa.  
 a.a. 2016-2017 - Foglio di esercizi - Studio di funzioni -

1) i)  $f(x) = |x| - \sqrt{|x|}$

•  $\text{dom } f = \mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$

•  $f$  è pari (il dominio è simmetrico rispetto all'origine e  $f(x) = f(-x) \forall x \in \mathbb{R}$ ).

Quindi basta studiare  $f$  su  $[0, +\infty[$  !! Sii  $f(0) = 0$ .

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Notiamo che  $f$  non ha un asintoto obliquo per

$x \rightarrow +\infty$ . Infatti  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{x} = 1 = a$ , ma

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x - \sqrt{x}) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\sqrt{x}) = -\infty$ .

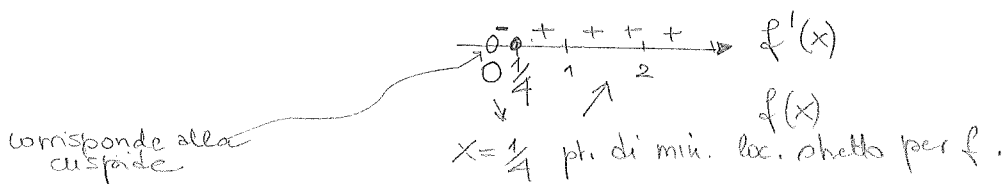
• segno :  $\begin{array}{c} - - - + + + \\ \circ \quad \bullet \\ 0 \quad 1 \end{array} \rightarrow x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$

•  $f$  è continua essendo somma di funzioni continue.

• Per  $x > 0$ ,  $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . Poiché  $f$  è continua in  $x=0$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty$ , si ha  $f'_+(0) = -\infty$ . Per simmetria risulta che  $(0,0)$  è una cuspide per  $f$ .

Inoltre, per  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{2\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2}$ , ossia  $x = \frac{1}{4}$ .

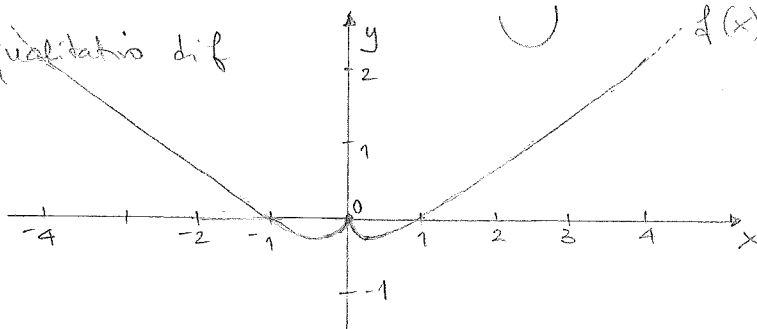
Risulta  $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ . (pt. critico per  $f$ )



• Per  $x > 0$ ,  $f''(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}^3}$

$\begin{array}{c} - + + + \\ \circ \quad + \quad + \quad + \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \rightarrow f''(x)$

• grafico qualitativo di  $f$



ii)  $f(x) = \sqrt{x + \frac{8}{x} + \left|1 - \frac{8}{x}\right|}$

•  $\text{dom } f =$

$= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0, x + \frac{8}{x} + \left|1 - \frac{8}{x}\right| \geq 0\}$

Poniamo  $g(x) = x + \frac{8}{x} + \left|1 - \frac{8}{x}\right| = \begin{cases} x + \frac{8}{x} + 1 - \frac{8}{x} & \text{se } 1 - \frac{8}{x} \geq 0 \\ x + \frac{8}{x} - 1 + \frac{8}{x} & \text{se } 1 - \frac{8}{x} < 0 \end{cases}$

Ne segue  $g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } \frac{8}{x} \leq 1 \\ x-1 + \frac{16}{x} & \text{se } \frac{8}{x} > 1 \end{cases}$

ovvero  $g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x < 0 \text{ o } x \geq 8 \\ x-1 + \frac{16}{x} & \text{se } 0 < x < 8 \end{cases}$

Ora  $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \\ x-1 + \frac{16}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 16}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x > 0 \end{cases}$  7 0 sempre

In definitiva,  $\text{dom } f = [-1, 0[ \cup ]0, +\infty[$  e

$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{se } -1 \leq x < 0 \text{ o } x \geq 8 \\ \sqrt{x-1 + \frac{16}{x}} & \text{se } 0 < x < 8 \end{cases}$

• nessuna simmetria evidente!

•  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x+1} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x-1 + \frac{16}{x}} = +\infty$

$x=0$  è asintoto verticale (da destra) per  $f$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-1 + \frac{16}{x}} = +\infty$

$f$  non ha asintoto obliquo

per  $x \rightarrow +\infty$ , poiché  $f(x) \sim \sqrt{x-1}$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

• segno 

•  $f$  è continua in  $\text{dom } f$  (somma e composizione di funtz. continue).

•  $\text{dom } f' = ]-1, 0[ \cup ]0, +\infty[ \setminus \{8\}$

Abbiamo

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x+1}} & \text{se } -1 < x < 0 \text{ o } x > 8 \\ \frac{1 - \frac{16}{x^2}}{2\sqrt{x-1+\frac{16}{x}}} & \text{se } 0 < x < 8. \end{cases}$$

Poiché  $f$  è continua (da destra) in  $x = -1$ , e  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = +\infty$ ,  
 si ha  $f'_+(-1) = +\infty$  ( $x = -1$  pt. con tg verticale al grafico di  $f$ ).

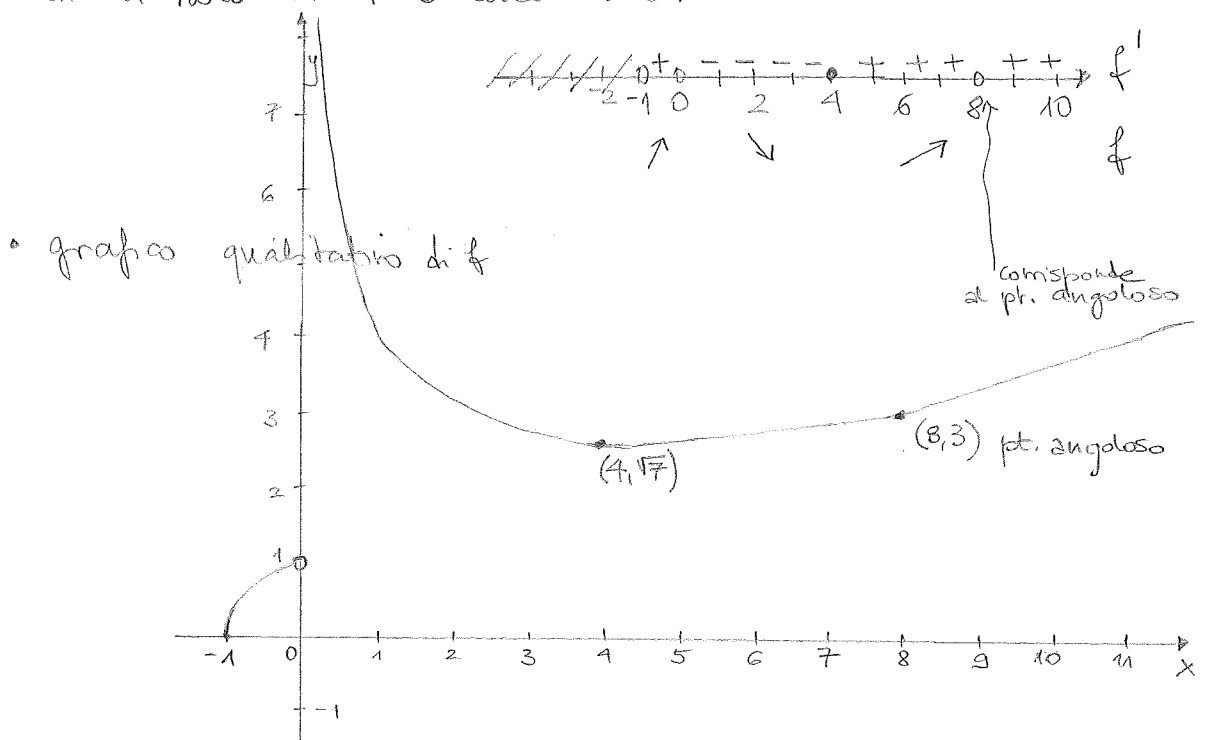
Inoltre  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \frac{1}{2}$ .

Poiché  $f$  è continua in  $x = 8$  e  $\lim_{x \rightarrow 8^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 8^-} \frac{x^2 - 16}{2x^2 \sqrt{x-1+\frac{16}{x}}} = \frac{1}{8}$ ,  
 si ha  $f'_-(8) = \frac{1}{8}$ ; d'altra parte

$\lim_{x \rightarrow 8^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 8^+} \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{6}$ , e  $f'_+(8) = \frac{1}{6}$ . Risultava

che il pt.  $(8, 3)$  è un pt. angoloso per  $f$ .

Notiamo infine che  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 4$ ,  
 di cui solo  $x = 4$  è accettabile.



iii) 
$$f(x) = \frac{\log x}{1 + \log x}$$

•  $\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0, \log x \neq -1\}$   
 $= ]0, +\infty[ \setminus \{\frac{1}{e}\}$   
 $= ]0, \frac{1}{e}[ \cup ]\frac{1}{e}, +\infty[$

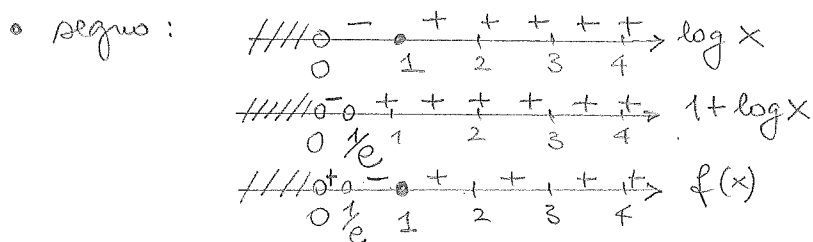
• Nessuna simmetria evidente. Si ha  $f(1) = 0$ .

•  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{\log x (\frac{1}{\log x} + 1)} = 1$  ;

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^-} \frac{(\log x)^{-1}}{(1 + \log x)^{\text{infinitesimo negativo}}} = +\infty$   $x = \frac{1}{e}$  asintoto verticale (da sinistra) per  $f$ ;

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^+} \frac{(\log x)^{-1}}{(1 + \log x)^{\text{infinitesimo positivo}}} = -\infty$   $x = \frac{1}{e}$  asintoto verticale (da destra) per  $f$ ;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{\log x (\frac{1}{\log x} + 1)} = 1$   $y = 1$  asintoto orizzontale per  $f$ , per  $x \rightarrow +\infty$ .



•  $f$  è continua in  $\text{dom } f$  (somma e quoziente di funzioni continue)

•  $\text{dom } f' = \text{dom } f$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1 + \log x) - (\log x) \frac{1}{x}}{(1 + \log x)^2} = \frac{1}{x(1 + \log x)^2} > 0$$
 (\*)

Non ci sono pt. critici per  $f$ ;

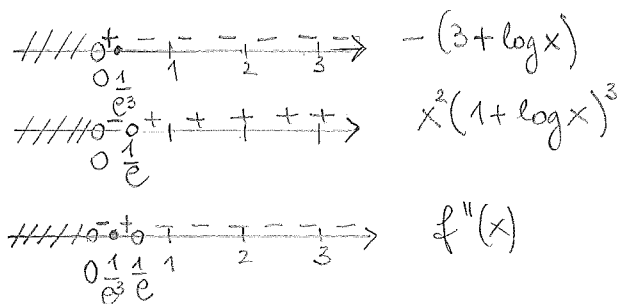
A horizontal number line is shown with tick marks at 0, 1/e, 1, 2, 3, 4. Above the line, there are plus signs for all x > 0, indicating that f' is always positive. Arrows point from the x-axis to the f' line at x=1/e and x=1.

•  $\text{dom } f'' = \text{dom } f$

$$f''(x) = \frac{-(1 + \log x)^{-2} - x \cdot 2(1 + \log x)^{-3} \cdot \frac{1}{x}}{x^2(1 + \log x)^4} =$$

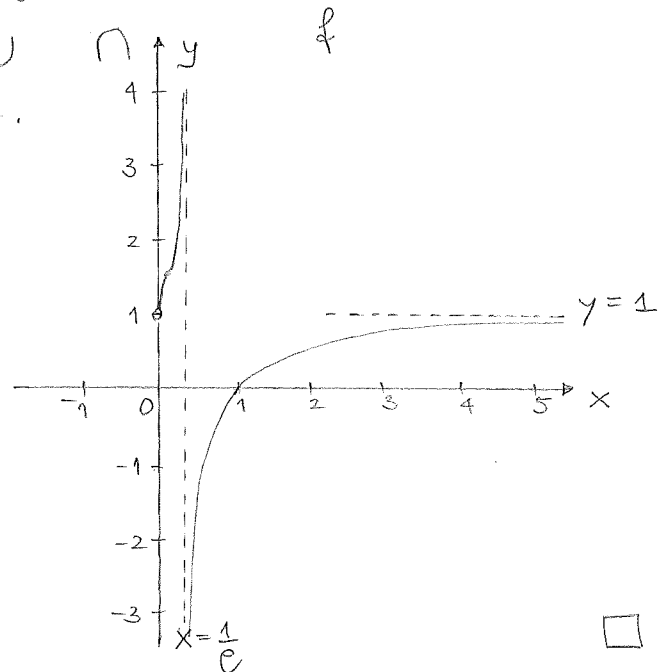
$$= \frac{-(3 + \log x)}{x^2(1 + \log x)^3}$$

(\*)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$ .



$x = \frac{1}{e^3}$  pt. di flesso per  $f$ .

• grafico qualitativo di  $f$



iv)  $f(x) = \frac{1+3x^4}{x^2}$

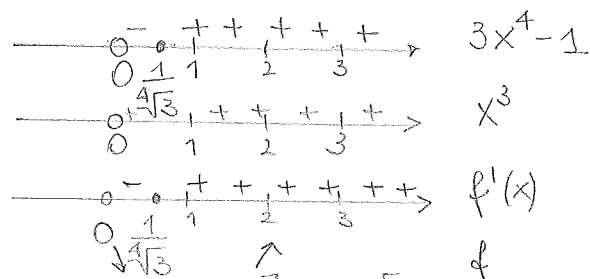
- $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$ .
- $f$  è pari (il dominio è simmetrico rispetto all'origine e  $f(x) = f(-x) \forall x \in \text{dom } f$ ).

Quindi basta studiare  $f$  su  $]0, +\infty[$  !!

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$   $x=0$  asintoto verticale (da destra) di  $f$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  non ci sono asintoti obliqui!
- Infatti  $f(x) \sim 3x^2$  per  $x \rightarrow +\infty$  !

- segno :  $f(x) > 0 \quad \forall x > 0$ .
- $f$  è continua su  $]0, +\infty[$ , poiché somma e quoziente di funzione continue.

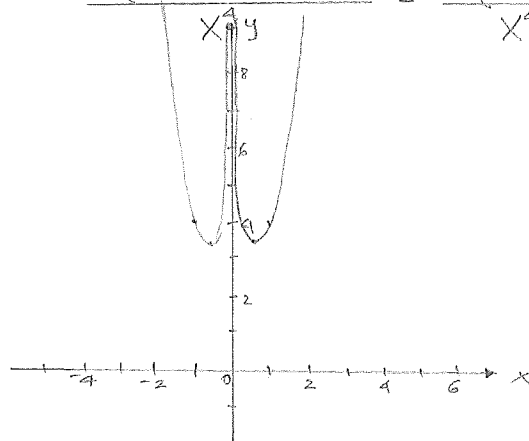
•  $\text{dom } f' = ]0, +\infty[$   $f'(x) = \frac{12x^3 \cdot x^4 - (1+3x^4) \cdot 2x}{x^6} = \frac{6x^4 - 2}{x^3}$   
 $= \frac{2(3x^4 - 1)}{x^3}$



$x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$  pt. critico per  $f(x)$  su  $]0, +\infty[$ ; risulta che  $x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$  è un pt. di min. loc. stretto per  $f$ ; si ha  $f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = 2\sqrt{3} \sim 3.5$

•  $\text{dom } f'' = ]0, +\infty[$   $f''(x) = 2 \left[ \frac{12x^3 \cdot x^3 - (3x^4 - 1)3x^2}{x^8} \right] =$   
 $= \frac{6(4x^4 - 3x^4 + 1)}{x^4} = \frac{6(x^4 + 1)}{x^4} > 0$  su  $]0, +\infty[$ .

• grafico qualitativo di  $f$



□

v)  $f(x) = \frac{x-4 + |x+4|}{2} e^x$

•  $\text{dom } f = \mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$ .

• nessuna simmetria evidente.

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

$y = 0$  asintoto orizzontale per  $f$ ,  
per  $x \rightarrow -\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

non ci sono asintoti obliqui, poiché  
 $f(x) \sim x e^x$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

•  $f(x) = \begin{cases} \frac{x-4 + x+4}{2} \cdot e^x & \text{se } x \geq -4 \\ \frac{x-4 - x-4}{2} e^x & \text{se } x < -4 \end{cases}$   
 $= \begin{cases} x e^x & \text{se } x \geq -4 \\ -4 e^x & \text{se } x < -4. \end{cases}$

segno



• continuità di  $f$  su tutto  $\mathbb{R}$ ,

•  $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

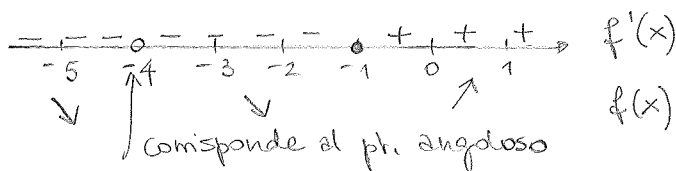
$$f'(x) = \begin{cases} e^x + x e^x & \text{se } x > -4 \\ -4e^x & \text{se } x < -4 \end{cases}$$

Poiché  $f$  è continua in  $x = -4$  e  $\lim_{x \rightarrow -4^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -4^+} (e^x + x e^x) = -3e^{-4}$ ,

si ha  $f'_+(-4) = -\frac{3}{e^4}$ ; analogamente da  $\lim_{x \rightarrow -4^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -4^-} (-4e^x) = -4e^{-4}$

segue  $f'_-(-4) = -\frac{4}{e^4}$ . Risulta che il pt.  $(-4, -\frac{4}{e^4})$  è un pt. angoloso per  $f$ .

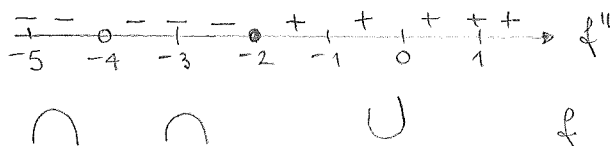
Infine  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1+x = 0$ , ossia  $x = -1$ .



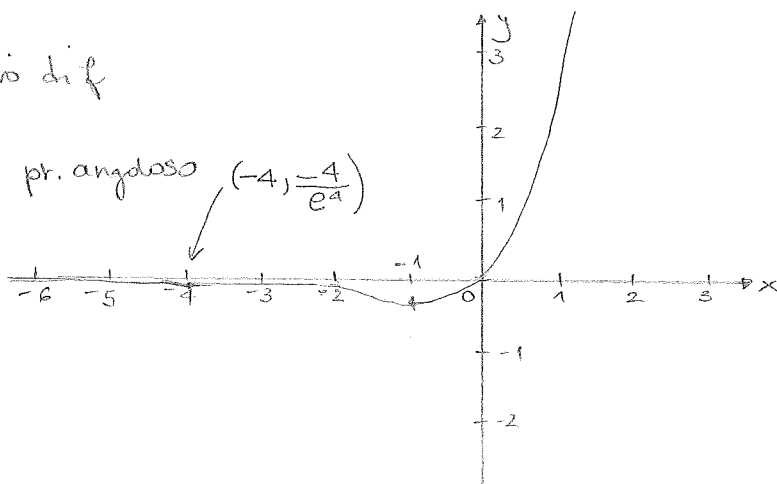
$x = -1$  è un pt. di minimo stretto per  $f$ , e  $f(-1) = -\frac{1}{e}$ .

•  $\text{dom } f'' = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

$$f''(x) = \begin{cases} (2+x)e^x & \text{se } x > -4 \\ -4e^x & \text{se } x < -4 \end{cases}$$



• grafico qualitativo di  $f$



vi)  $f(x) = \frac{e^x}{1-x^2}$

- $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} = ]-\infty, -1[ \cup ]-1, 1[ \cup ]1, +\infty[$ .
- nessuna simmetria evidente; si ha  $f(0) = 1$ .
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$   $y=0$  asintoto orizzontale per  $f$ , per  $x \rightarrow -\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{e^x \rightarrow \frac{1}{e}}{1-x^2 \rightarrow 0^- \text{ infinitesimo negativo}} = -\infty$   $x=-1$  asintoto verticale (da sinistra) per  $f$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{e^x \rightarrow \frac{1}{e}}{1-x^2 \rightarrow 0^+ \text{ infinitesimo positivo}} = +\infty$   $x=-1$  asintoto verticale (da destra) per  $f$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^x \rightarrow e}{1-x^2 \rightarrow 0^+ \text{ infinitesimo positivo}} = +\infty$   $x=1$  asintoto verticale (da sinistra) per  $f$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x}{1-x^2} = -\infty$   $x=1$  asintoto verticale (da destra) per  $f$

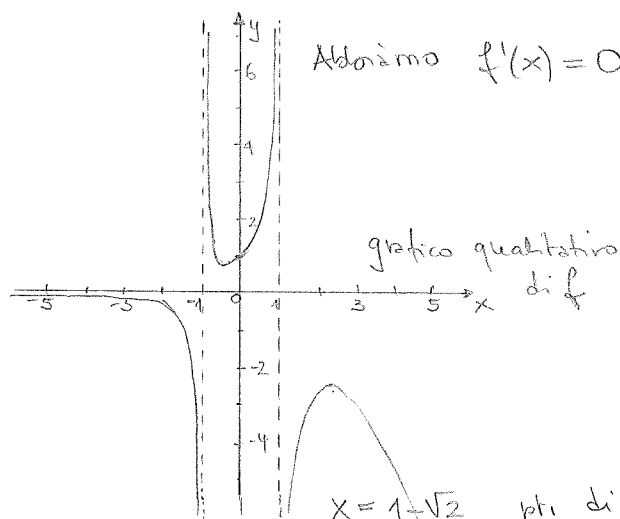
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1-x^2} = -\infty$   $f$  non ha asintoto obliquo, per  $x \rightarrow +\infty$  poiché  $f(x) \sim -\frac{e^x}{x^2}$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

• segno  $\frac{-}{-2} \frac{-}{-1} \frac{0}{0} \frac{+}{0} \frac{+}{1} \frac{0}{1} \frac{-}{2} \frac{-}{+} \rightarrow f(x)$  ( $e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ )

- $f$  è continua in ogni pt. del suo dominio, essendo quoziente di funzioni continue.

•  $\text{dom } f' = \text{dom } f$   $f'(x) = \frac{e^x(1-x^2) + 2xe^x}{(1-x^2)^2} = \frac{e^x(-x^2+2x+1)}{(1-x^2)^2}$

Abbiamo  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{-2} = 1 \pm \sqrt{2}$



$\frac{-}{-2} \frac{-}{-1} \frac{0}{0} \frac{+}{0} \frac{+}{1} \frac{0}{1} \frac{-}{2} \frac{-}{+} \rightarrow -x^2+2x+1$   
 $\frac{+}{-2} \frac{+}{-1} \frac{0}{0} \frac{+}{0} \frac{+}{1} \frac{0}{1} \frac{-}{2} \frac{-}{+} \rightarrow (1-x^2)^2$   
 $\frac{-}{-2} \frac{-}{-1} \frac{0}{0} \frac{+}{0} \frac{+}{1} \frac{0}{1} \frac{-}{2} \frac{-}{+} \rightarrow f'(x)$   
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \downarrow \quad f$

$x = 1 - \sqrt{2}$  pt. di min. loc. stretto per  $f$

$x = 1 + \sqrt{2}$  pt. di max. loc. stretto per  $f$ .

□

vii)  $f(x) = \log \left( \frac{x^2 - 2|x| + 1}{x+1} \right)$  •  $\text{dom } f = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq -1, \frac{x^2 - 2|x| + 1}{x+1} > 0 \right\}$

Oss. che  $x^2 - 2|x| + 1 = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Segue quindi facilmente che  $\text{dom } f = ]-1, 1[ \cup ]1, +\infty[$

(poiché,  $\forall x \geq 0$ ,  $\frac{x^2 - 2x + 1}{x+1} = \frac{(x-1)^2}{x+1} > 0$  se  $x \neq 1$ , e

$\forall x < 0$ ,  $\frac{x^2 + 2x + 1}{x+1} = \frac{(x+1)^2}{x+1} = x+1 > 0$  se  $-1 < x$ ).

Posiamo inoltre scrivere  $f(x) = \begin{cases} \log \left( \frac{(x-1)^2}{x+1} \right) & \text{se } x > 0, x \neq 1 \\ \log(x+1) & \text{se } -1 < x \leq 0 \end{cases}$

• nessuna simmetria evidente

•  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \log(x+1) = -\infty$

$x = -1$  asintoto verticale (da destra) per  $f$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \log \left( \frac{(x-1)^2}{x+1} \right) = -\infty$

$x = 1$  asintoto verticale (da sinistra) per  $f$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \log \left( \frac{(x-1)^2}{x+1} \right) = -\infty$

$x = 1$  asintoto verticale (da destra) per  $f$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log \left( \frac{(x-1)^2}{x+1} \right) = +\infty$

$f$  non ha asintoto obliquo, per  $x \rightarrow +\infty$ , poiché  $f(x) \sim \log x$ , per  $x \rightarrow +\infty$ .

(\*)  
vedi fondo  
pag. 10

• segno di  $f$

•  $f$  è continua nel suo dominio (somma, rapporto, composizione di funzioni continue)

•  $\text{dom } f' = \text{dom } f \setminus \{0\}$

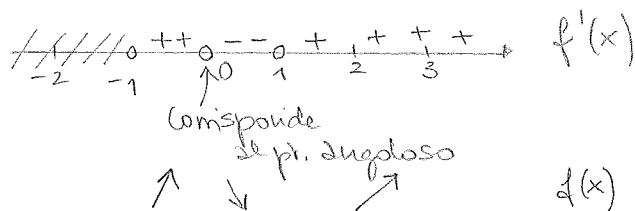
$f'(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{(x-1)^2} \cdot \frac{2(x-1)(x+1) - (x-1)^2}{(x+1)^2} & \text{se } x > 0, x \neq 1 \\ \frac{1}{x+1} & \text{se } -1 < x < 0 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{x^2-1} & \text{se } x > 0, x \neq 1 \\ \frac{1}{x+1} & \text{se } -1 < x < 0. \end{cases}$$

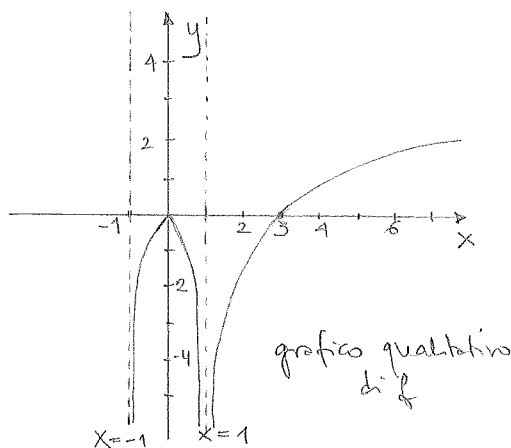
Poiché  $f$  è continua in  $x=0$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x+1} = 1$  si ha  $f'_-(0) = 1$ ; analog, da  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+3}{x^2-1} = -3$  segue  $f'_+(0) = -3$ .

Risulta che il pt.  $(0,0)$  è un pt. angoloso per  $f$ .

Infine  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$ , ma questo non è accettabile poiché  $-3 \notin ]0, +\infty[ \setminus \{1\}$ .

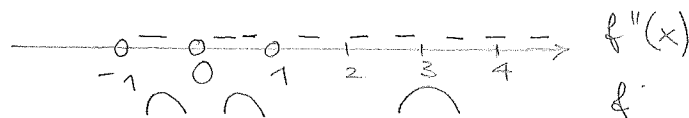


•  $\text{dom } f'' = \text{dom } f'$

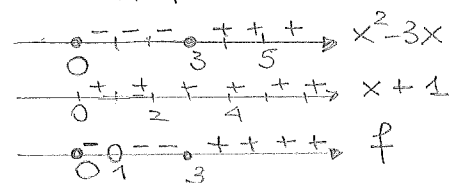


$$f''(x) = \begin{cases} \frac{(x^2-1) - (x+3)2x}{(x^2-1)^2} & \text{se } x > 0, x \neq 1 \\ -\frac{1}{(x+1)^2} & \text{se } -1 < x < 0 \end{cases}$$

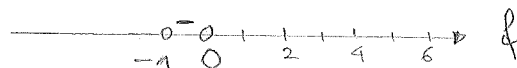
$$= \begin{cases} \frac{-x^2-6x-1}{(x^2-1)^2} & \text{se } x > 0, x \neq 1 \\ -\frac{1}{(x+1)^2} & \text{se } -1 < x < 0 \end{cases}$$



(\*) segno:  $x \geq 0, x \neq 1: \frac{x^2-2x+1}{x+1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2-3x}{x+1} \geq 0$



$-1 < x < 0: \frac{x^2+2x+1}{x+1} = x+1 < 1$  se  $x < 0$  quindi



2) i)  $f(x) = x - \arctan x$

•  $\text{dom } f = \mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$ .

•  $f$  è dispari (il dominio è simmetrico

rispetto all'origine e  $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ). Basterebbe studiarla per  $x \geq 0$ .

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Oss. che  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = a$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-\arctan x] = -\frac{\pi}{2} = b$

$\Rightarrow y = x + \frac{\pi}{2}$  è un asintoto obliquo per  $f$ , per  $x \rightarrow -\infty$

Oss. che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = a$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-\arctan x] = -\frac{\pi}{2} = b$

$\Rightarrow y = x - \frac{\pi}{2}$  è un asintoto obliquo per  $f$ , per  $x \rightarrow +\infty$ .

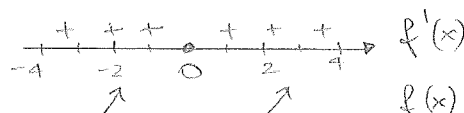
• segue: lo otteniamo a posteriori.

• continuità in tutti i pt. del dominio essendo somma di funt. continue.

•  $\text{dom } f' = \mathbb{R}$   $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$

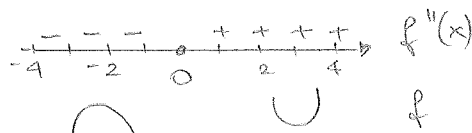
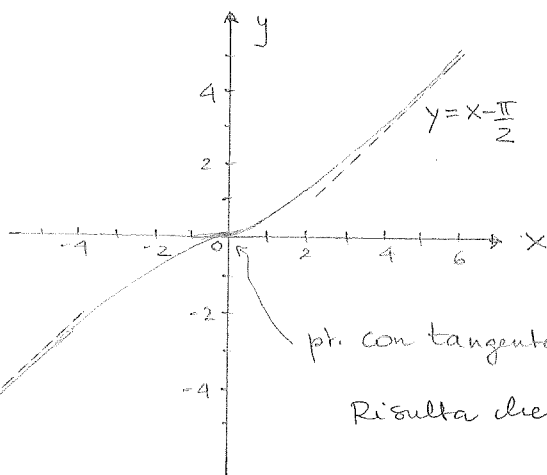
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$x = 0$  non è né un pt. di



massimo loc., né un pt. di min. loc. per  $f$ ;  $f(0) = 0$ .

•  $\text{dom } f'' = \mathbb{R}$   $f''(x) = \frac{2x(1+x^2) - x^2 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$



pt. con tangente orizzontale.

Risulta che  $f$  è negativa per  $x < 0$  e positiva

per  $x > 0$ , e

quindi  $x < \arctan x \quad \forall x < 0$ ,  $x > \arctan x \quad \forall x > 0$ .  $\square$

ii)  $f(x) = x + \arctan\left(\frac{2x+1}{x}\right)$

•  $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$

• nessuna simmetria evidente

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ; oss. che  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = a \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = \arctan 2 = b \end{cases}$

$\Rightarrow y = x + \arctan 2$  è asintoto obliquo per  $f$ , per  $x \rightarrow -\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ; analog. a sopra segue che  $y = x + \arctan 2$

è asintoto obliquo per  $f$ , per  $x \rightarrow +\infty$ .

• segno: lo determino a posteriori.

•  $f$  è continua in tutti i pt. del dominio!

•  $\text{dom } f' = \text{dom } f$   $f'(x) = 1 + \frac{1}{1 + \left(\frac{2x+1}{x}\right)^2} \cdot \frac{2x - (2x+1)}{x^2} =$   
 $= 1 + \frac{x^2}{5x^2 + 4x + 1} \cdot \frac{-1}{x^2} =$   
 $= \frac{5x^2 + 4x}{5x^2 + 4x + 1}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -\frac{4}{5}$  pt. critici per  $f$

$\nearrow$   
 $\notin \text{dom } f$   
 non accettabile

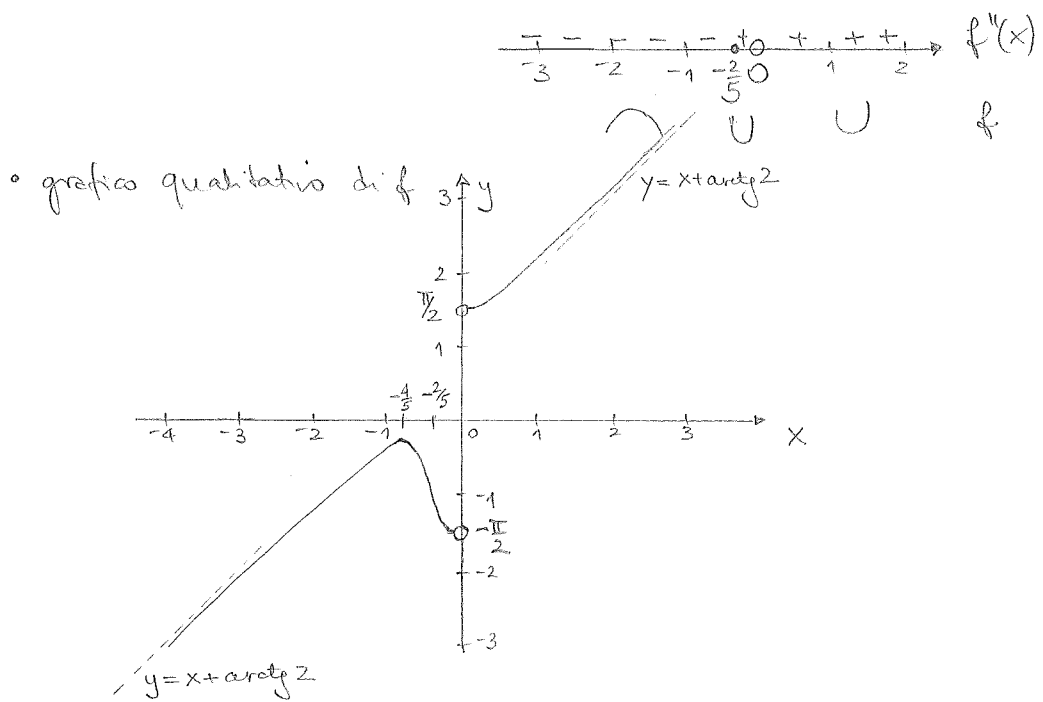
$\begin{array}{ccccccccccc} + & + & - & + & + & + & + & & f' \\ -2 & -1 & -\frac{4}{5} & 0 & 1 & 2 & & & \\ \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & & & f \end{array}$

$x = -\frac{4}{5}$  pt. max loc. shello per  $f$

$f\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{4}{5} + \arctan\left(\frac{3}{4}\right) < -\frac{4}{5} + \frac{3}{4} = -\frac{1}{20} < 0$   
 (Nota i))

Oss. che  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$ .

•  $\text{dom } f'' = \text{dom } f$   $f''(x) = \frac{(10x+4)(5x^2+4x+1) - (5x^2+4x)(10x+4)}{(5x^2+4x+1)^2}$   
 $= \frac{10x+4}{(5x^2+4x+1)^2}$



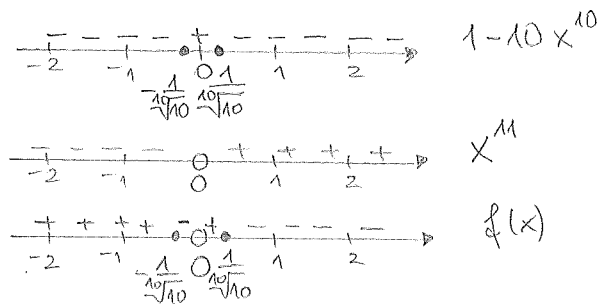
③

$$f(x) = \frac{1 - 10x^{10}}{x^{11}}$$

- $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$
- $f$  è dispari! Basterebbe studiarla per  $x \geq 0$ .

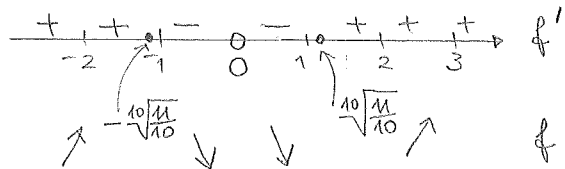
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$   $y=0$  asint. orizz. per  $f$ , per  $x \rightarrow -\infty$ ;
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$   $x=0$  asint. verticale (da sinistra) per  $f$ ;
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  " (da destra) per  $f$ ;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$   $y=0$  asintoto orizz. per  $f$ , per  $x \rightarrow +\infty$ .

• sequo:



- continuità in tutti i pt. del dominio!
- $\text{dom } f' = \text{dom } f$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-100x^9 \cdot x^{11} - (1 - 10x^{10}) 11x^{10}}{x^{22}} \\ &= \frac{-100x^{20} + 110x^{10} - 11}{x^{12}} = \frac{10x^{10} - 11}{x^{12}} \end{aligned}$$



$$x = -\sqrt[10]{\frac{11}{10}} \quad \text{pt. di max loc. per } f \quad f\left(-\sqrt[10]{\frac{11}{10}}\right) = \frac{1 - 10 \cdot \frac{11}{10}}{-\frac{11}{10} \sqrt[10]{\frac{11}{10}}} = \frac{100}{11 \sqrt[10]{\frac{11}{10}}} = \frac{10 \cdot \frac{10}{11} \sqrt[10]{\frac{11}{10}}}{\frac{11}{10} \sqrt[10]{\frac{11}{10}}} = 10 \left(\frac{10}{11}\right)^{-\frac{11}{10}} = 10 \left(\frac{10}{11}\right)^{\frac{11}{10}} \sim 9$$

$$x = \sqrt[10]{\frac{11}{10}} \quad \text{pt. di min loc. per } f \quad f\left(\sqrt[10]{\frac{11}{10}}\right) = -10 \left(\frac{10}{11}\right)^{\frac{11}{10}} \sim -9$$

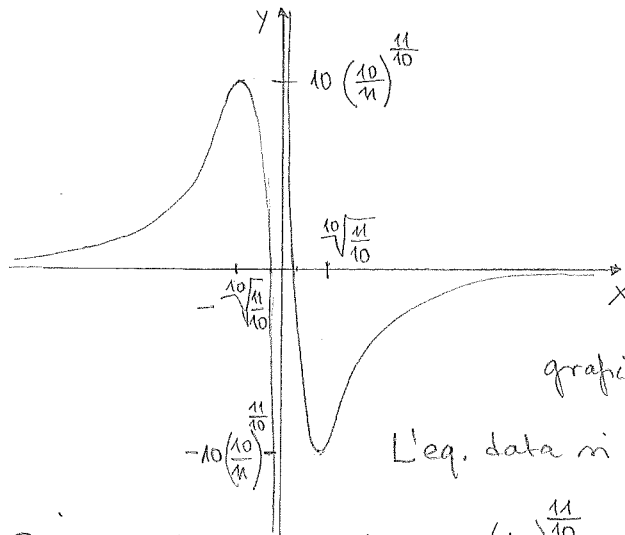


grafico qualitativo di  $f$ .

L'eq. data si scrive  $f(x) = \alpha$ .

Risulta allora • se  $\alpha < -10 \left(\frac{10}{11}\right)^{\frac{11}{10}}$  o  $\alpha > 10 \left(\frac{10}{11}\right)^{\frac{11}{10}}$ , la soluzione di  $f(x) = \alpha$  è una sola;

• se  $\alpha = -10 \left(\frac{10}{11}\right)^{\frac{11}{10}}$  o  $\alpha = 0$  o  $\alpha = 10 \left(\frac{10}{11}\right)^{\frac{11}{10}}$  le soluzioni di  $f(x) = \alpha$  sono due;

• se  $-10 \left(\frac{10}{11}\right)^{\frac{11}{10}} < \alpha < 0$  o  $0 < \alpha < 10 \left(\frac{10}{11}\right)^{\frac{11}{10}}$ , le soluzioni di  $f(x) = \alpha$  sono tre. ■

ii)  $f(x) = \frac{x^2}{18} - |\log x|$

•  $\text{dom } f = ]0, +\infty[$

•  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$   $x=0$  asintoto verticale (da destra) per  $f$ .

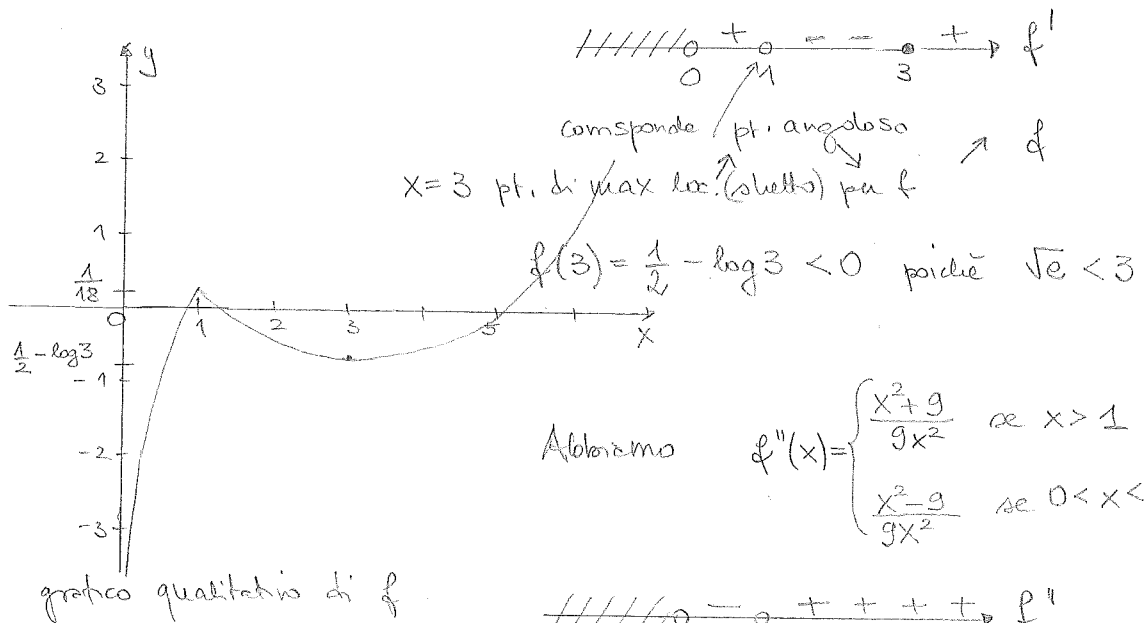
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

- $f$  continua in  $]0, +\infty[$  (componibile e somma di funt. continue)
- $\text{dom } f' = ]0, +\infty[ \setminus \{1\}$   $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{18} - \log x & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{x^2}{18} + \log x & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x}{9} - \frac{1}{x} & \text{se } x > 1 \\ \frac{x}{9} + \frac{1}{x} & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Perché  $f$  è continua in  $x=1$  e  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \frac{10}{9}$  mi ha  $f'_-(1) = \frac{10}{9}$ ;  
 analog,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = -\frac{8}{9}$  e mi ha  $f'_+(1) = -\frac{8}{9}$ . Ne segue che  $(1, \frac{1}{18})$  è un pt.  
 angoloso per  $f$ .

Abbiamo  $f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{9x} & \text{se } x > 1 \\ \frac{x^2+9}{9x} & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$



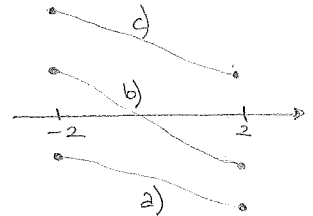
L'eq. data è equivalente a  $f(x) = \alpha$ . Quindi si ha  
 una soluzione se  $\alpha < \frac{1}{2} - \log 3$  o  $\alpha > \frac{1}{18}$  ;  
 due soluzioni se  $\alpha = \frac{1}{2} - \log 3$  o  $\alpha = \frac{1}{18}$  ;  
 tre soluzioni se  $\frac{1}{2} - \log 3 < \alpha < \frac{1}{18}$  .

- 4) Consideriamo  $f(x) = x^5 - 82x + \alpha$ . Oss. che  $f$  è continua su  $\mathbb{R}$ ; inoltre derivabile e  $f'(x) = 5x^4 - 82$ . Notiamo che

$$f'(x) = 5x^4 - 82 \leq 80 - 82 = -2 < 0$$

$\uparrow$   
 $\forall x: |x| \leq 2$

e quindi  $f$  è strettamente decrescente su  $[-2, 2]$ . Quindi, i possibili casi sono tre (vedi figura):



- a)  $f(-2) < 0 \Rightarrow \nexists$  uno zero per  $f$   
 b)  $f(-2) > 0$  e  $f(2) < 0 \Rightarrow \exists!$  zero per  $f$   
 c)  $f(2) > 0 \Rightarrow \nexists$  uno zero per  $f$ .

Questo significa

- a)  $f(-2) = (-2)^5 - 82(-2) + \alpha = 132 + \alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha < -132 \Rightarrow \nexists$  zero perf  
 c)  $f(2) = 2^5 - 82(2) + \alpha = -132 + \alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha > 132 \Rightarrow \nexists$  zero perf  
 b)  $\begin{cases} f(-2) = 132 + \alpha > 0 \\ f(2) = -132 + \alpha < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -132 < \alpha < 132 \Rightarrow \exists! \text{ zero per } f$

Per  $\alpha = -132$  si ha  $f(-2) = 0$ , per  $\alpha = 132$  si ha  $f(2) = 0$ , e tali zeri sono unici. In conclusione,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^5 - 82x + \alpha$  ha al più uno zero in  $[-2, 2]$ . ■

5) i)  $\boxed{f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^3}}$

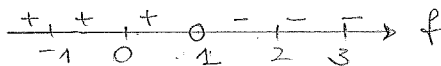
- $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1\} = ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$
- no simmetrie evidenti
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$   $y=0$  asintoto orizz. per  $f$ , per  $x \rightarrow -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$   $x=1$  asint. verticale (da sinistra) per  $f$ ,

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$  " (da destra) per  $f$ ,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$   $y=0$  asintoto orizz. per  $f$ , per  $x \rightarrow +\infty$ .

• segue



•  $f$  è continua in dom  $f$ .

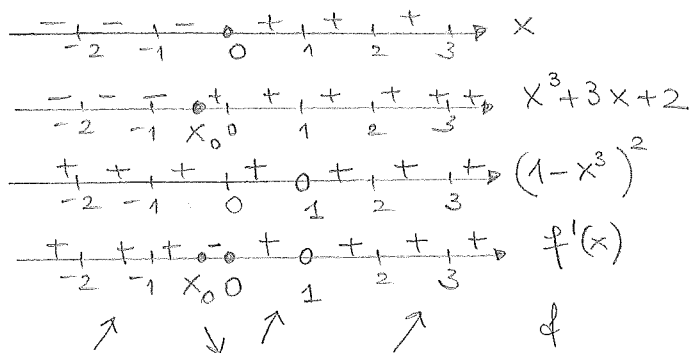
• dom  $f' = \text{dom } f$        $f'(x) = \frac{2x(1-x^3) - (1+x^2)(-3x^2)}{(1-x^3)^2} =$   
 $= \frac{x^4 + 3x^2 + 2x}{(1-x^3)^2} = \frac{x(x^3 + 3x + 2)}{(1-x^3)^2}$

$g(x) = x^3 + 3x + 2$  continua ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$  ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

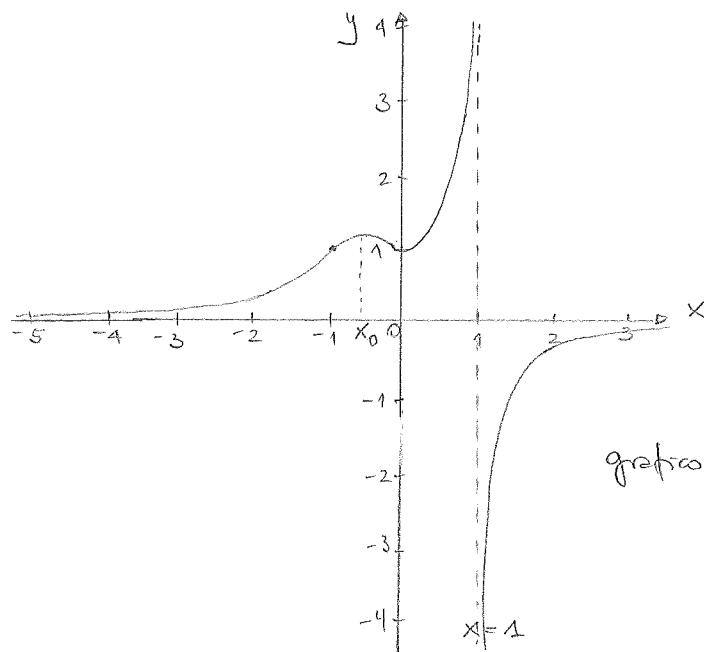
$g'(x) = 3x^2 + 3 > 0 \Rightarrow g$  strett. crescente

$g(-1) = -2$  ,  $g(0) = 2$

$\Rightarrow \exists! x_0 \in ]-1, 0[ : g(x_0) = 0.$



$x_0$  pt. di max. loc. strett. perf



ii)  $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

•  $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$

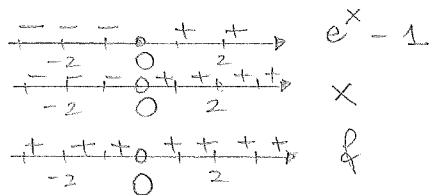
• nessuna simmetria evidente

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$   $y=0$  asintoto orizz. per  $f$ , per  $x \rightarrow -\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$  (limite notevole!)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  non c'è asintoto obliquo poiché  $f(x) \sim \frac{e^x}{x}$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

• segno

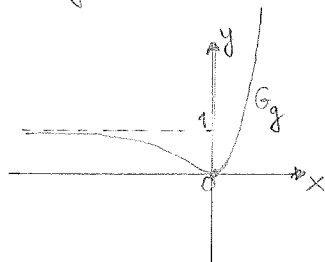


•  $f$  continua nel dom  $f$ .

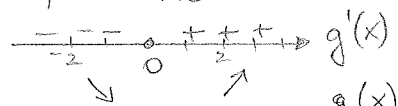
•  $\text{dom } f' = \text{dom } f$   $f'(x) = \frac{e^x \cdot x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{e^x(x-1) + 1}{x^2}$

$g(x) \doteq (x-1)e^x + 1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

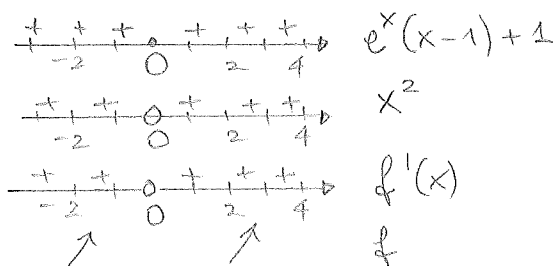


$g'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$



$g$  ha minimo in  $x=0$ ;  $g(0)=0$

Quindi



$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \frac{1}{2}$

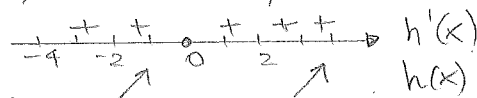
•  $\text{dom } f'' = \text{dom } f$

$f''(x) = \frac{xe^x \cdot x^2 - (e^x(x-1)+1)2x}{x^4} = \frac{e^x x^2 - 2e^x x + 2e^x - 2}{x^3}$   
 $= \frac{(x^2 - 2x + 2)e^x - 2}{x^3}$

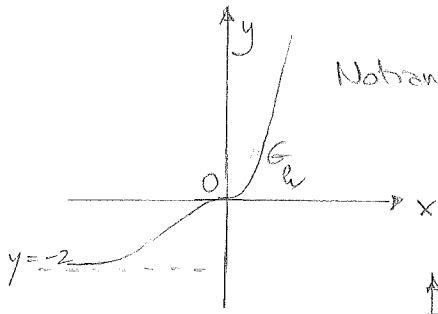
$h(x) \doteq (x^2 - 2x + 2)e^x - 2$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -2$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

$h'(x) = (2x-2)e^x + (x^2-2x+2)e^x = x^2 e^x$



-19-



Notiamo che  $h(0) = 0$

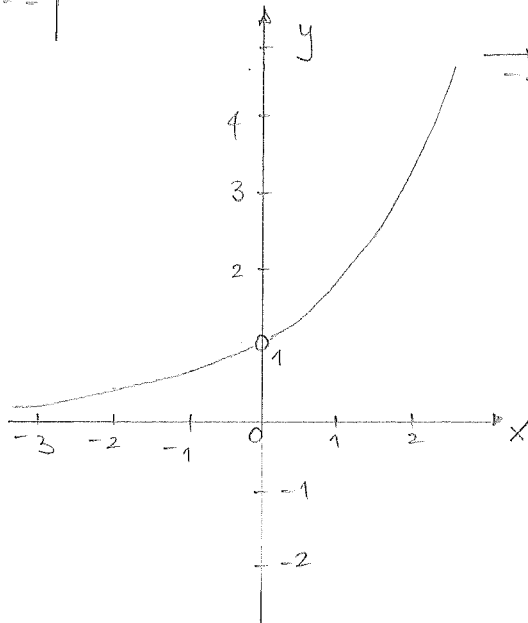
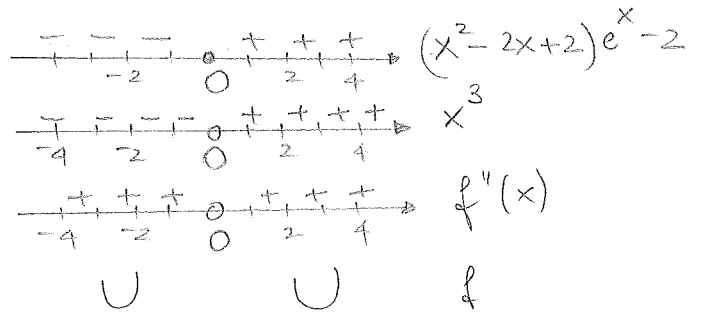


grafico qualitativo di  $f$