

PIAZZA 3

- 3.1) Dal teorema della derivata di funzioni composte segue che  
 $f'(x) = (g^2(\sin 2x))' = 2g(\sin 2x) \cdot g'(\sin 2x) \cdot (\cos 2x) \cdot 2 \quad \forall x \in \mathbb{R};$   
 in particolare  $f'(0) = 2g(\sin 0) \cdot g'(\sin 0) \cdot (\cos 0) \cdot 2$   
 $= 2g(0)g'(0) \cdot 2 = 4(-2) \cdot 3.$

Quindi  $f'(0) = -24.$  ■

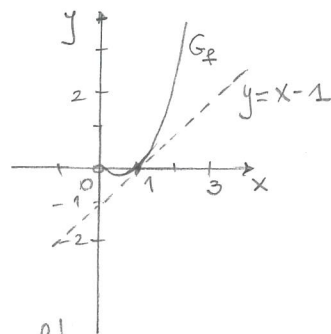
- 3.2)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x - \cos x$ . Osserviamo che  $f$  è continua su  $\mathbb{R}$ ;  
 inoltre  $\inf_{\mathbb{R}} f = -\infty$ ,  $\sup_{\mathbb{R}} f = +\infty$ . Per il teorema dei valori intermedi  
 segue che  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  e quindi  $f$  è suriettiva.  
 Inoltre, essendo  $f'(x) = 2 + \sin x \geq 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f$  è  
 strettamente crescente su  $\mathbb{R}$ , che è un intervallo. Possiamo così  
 concludere che  $f$  è iniettiva su  $\mathbb{R}$ . Indefinitiva,  $f$  è biiettiva  
 e quindi esiste la funzione inversa  $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Poiché  
 $f(x) = 2x - \cos x = \pi \iff x = \frac{\pi}{2}$ , dal teorema della derivata  
 della funzione inversa segue che  $(f^{-1})'(\pi) = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{2})}$ , ossia  
 $(f^{-1})'(\pi) = \frac{1}{(2 + \sin x)|_{\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{3}.$  ■

- 3.3)  $f(x) = x^2 \log x$  su  $]0, +\infty[$ . L'eq. della retta tg  $r$  è data da  
 $y = f(1) + f'(1)(x-1) = f'(1)(x-1)$ . Poiché  $f'(x) = 2x \log x + x^2 \cdot \frac{1}{x}$   
 $= 2x \log x + x$ , risulta  $f'(1) = 1$  e  $y = x - 1.$

$f(x) = x^2 \log x$  : • dom  $f = ]0, +\infty[$

- segno  $f$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$      $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = x(2 \log x + 1)$    
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$



3.4) a)  $f(x) = x - |x|$  : •  $g(x) = x$  è derivabile in tutto  $\mathbb{R}$ ; ricordiamo che  $h(x) = |x|$  è derivabile in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Rimulta che  $f$  è derivabile in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  (nota:  $f$  non può essere derivabile in  $x=0$ , poiché risulterebbe  $|x| = x - f(x)$  derivabile in  $x=0$ ).

• Possiamo anche procedere come segue:  $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ .

Ovviamente  $f$  è deriv. in tutti i punti  $x \neq 0$ . In  $x=0$  si ha

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = 0 \quad \forall h > 0 \quad \text{e quindi} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0.$$

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{2h}{h} \quad \forall h < 0 \quad \text{e quindi} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 2,$$

da cui ne segue che  $\nexists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0)$ .

• Possiamo verificare la non-derivabilità di  $f$  in  $x=0$  anche come segue: oss. che  $f$  è continua in 0; inoltre  $f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} f'(x) = 2$ , mentre  $f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$  (applicando il collaio del teorema di de L'Hopital), da cui segue  $\nexists f'(0)$ .  $\square$

$g(x) = (x + |x|)^2$  : abbiamo  $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 4x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ . Ovviamente

$g$  è derivabile in tutti i punti  $x \neq 0$ .

Notiamo che  $g'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 8x & \text{se } x > 0 \end{cases}$ . Essendo  $g$  continua in 0

e  $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = 0$ , per il collaio del teorema di de L'Hopital, si ha che  $g$  è derivabile anche in  $x=0$  e  $g'(0) = 0$ .  $\square$

$h(x) = x \sin |x|$  : procedendo come per la funzione  $g$  si ottiene che  $h$  è derivabile su tutto  $\mathbb{R}$ .  $\blacksquare$

$$|1+x| = \begin{cases} -(1+x) & \text{se } x < -1 \\ 1+x & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$$

b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} |1+x| - 1 & \text{se } x < 0 \\ 2 \sin x & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} -x-2 & \text{se } x < -1 \\ x & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 2 \sin x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

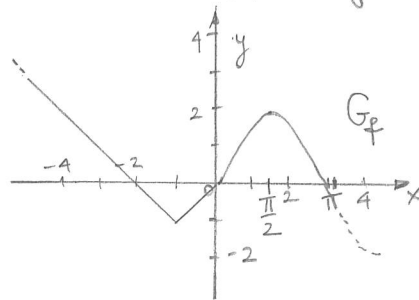
- Basta verificare la continuità nel pt.  $x=0$  essendo  $f$  continua per ogni  $x \neq 0$  (prodotto, composizione, differenza di funzioni continue).  
Notiamo che  $\lim_{x \rightarrow 0^-} (|1+x| - 1) = 0 = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 \sin x)$ ,  
provando la continuità di  $f$  in  $x=0$ .

Abbiamo  $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < -1 \\ 1 & \text{se } -1 < x < 0 \\ 2 \cos x & \text{se } x > 0. \end{cases}$  Notiamo subito che

$x=-1$  è un pt. di non-derivabilità (pt. angoloso), poiché  
 $f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = -1$  e  $f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = 1$ .  
(avendo applicato il corollario del teorema di de l'Hopital).

D'altra parte,  $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 1$  e  $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 2$   
e quindi nemmeno  $x=0$  è un pt. di derivabilità di  $f$   
(anche esso è un pt. angoloso)

In conclusione, l'insieme di continuità di  $f$  è  $\mathbb{R}$ , mentre  
l'insieme di derivabilità di  $f$  è  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ .



c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1+2x & \text{se } x \leq 1 \\ ax^2 - b & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Determiniamo innanzitutto  $a, b \in \mathbb{R}$  tali che  $f$  risulti continua

in  $x=1$  :  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 = f(1)$  e  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a - b$ .

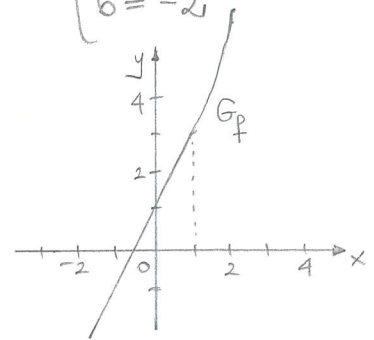
Quindi deve essere  $a - b = 3$ . D'altra parte, essendo

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < 1 \\ 2ax & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad \text{risulta (corollario del teorema di de l'Hopital)}$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 2 \quad \text{e} \quad f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 2a. \quad \text{Di conseguenza,}$$

$$f \text{ è derivabile in } x=1 \iff \begin{cases} 2a=2 \\ a-b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$$

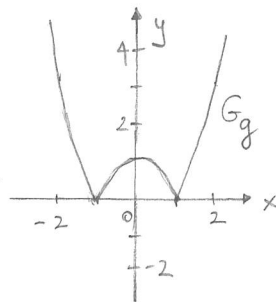
In definitiva,  $f(x) = \begin{cases} 1+2x & \text{se } x \leq 1 \\ x^2+2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$



Osserviamo che  $f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

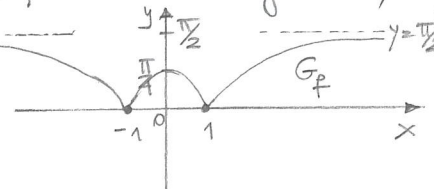
e quindi  $\nexists f''(1)$ ; risulta che  $f$  non è derivabile due volte in  $x=1$ . ■

3.5)  $g(x) = |x^2 - 1|$



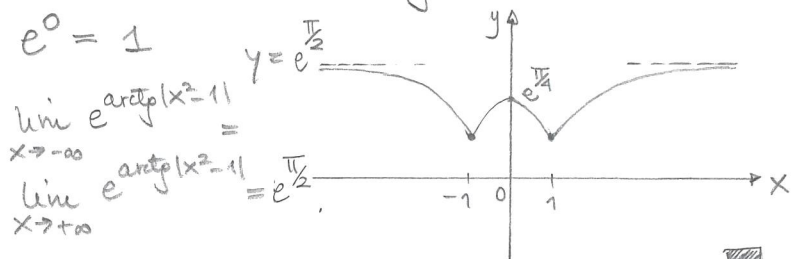
$f(x) = \arctg |x^2 - 1|$

( $\arctg x$  è strett. crescente; quindi conserva la monotonia di  $g(x)$ ). Inoltre  $\arctg 0 = 0$ ,  $\arctg 1 = \frac{\pi}{4}$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}$ )



$f(x) = e^{\arctg |x^2 - 1|}$

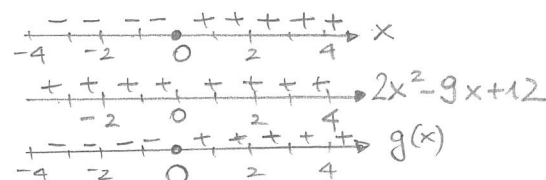
( $e^x$  è strett. crescente; quindi conserva la monotonia di  $\arctg |x^2 - 1|$ ). Inoltre  $e^0 = 1$



3.6)  $f(x) = |2x^3 - 9x^2 + 12x|$  su  $[-1, 3]$ .

In questo caso, possiamo studiare semplicemente la funzione  $g(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$  su  $\mathbb{R}$ , e poi dedurre  $f(x) = \begin{cases} g(x) & \forall x \in [-1, 3]: g(x) \geq 0 \\ -g(x) & \forall x \in [-1, 3]: g(x) < 0 \end{cases}$ .

Abbiamo  $g(x) = x(2x^2 - 9x + 12)$



•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

•  $g'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x-2)(x-1)$

$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x=1, x=2$



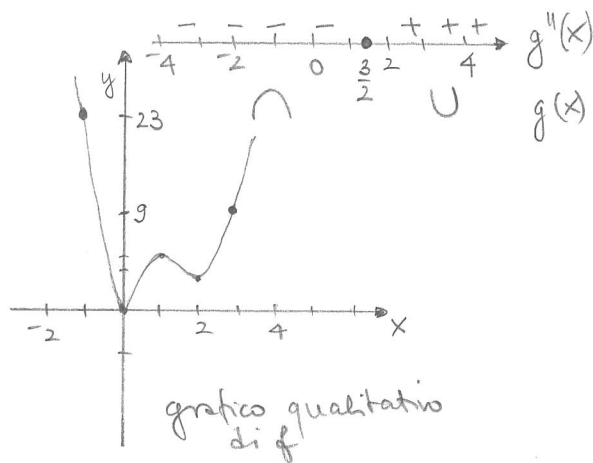
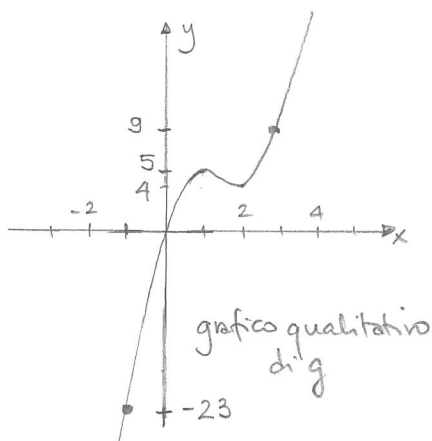
$x=1$  pt. di max. loc. stretto per  $g$

$g(1) = 5$

$x=2$  pt. di min. loc. stretto per  $g$ ;  $g(2) = 4$

•  $g''(x) = 12x - 18 = 6(2x-3)$

$x = \frac{3}{2}$  pt. di flesso per  $g$



Abbiamo immediatamente che  $x=0$  è pt. di minimo assoluto (e locale) e  $x=-1$  pt. di massimo assoluto (e locale);

invece  $x=2$  è pt. di minimo locale, mentre  $x=1$  e  $x=3$  sono pt. di massimo locale per  $f$ .





3.7) i) 
$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt{|x-4|-2} & \text{se } x < 0 \\ \arctan(x^2) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

• Ricordando che  $|x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{se } x \geq 4 \\ -(x-4) & \text{se } x < 4 \end{cases}$   
possiamo scrivere

$$= \begin{cases} x\sqrt{2-x} & \text{se } x < 0 \\ -\arctan x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$



•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x\sqrt{2-x} = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [-\arctan x^2] = -\frac{\pi}{2}$

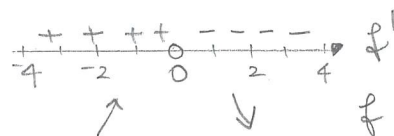
Notiamo che  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x\sqrt{2-x} = 0 = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [-\arctan x^2]$  provando che  $f$  è continua in  $x=0$ . D'altra parte,  $f$  è continua in ogni  $x \neq 0$  essendo composizione e prodotto di funzioni continue.

• 
$$f'(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x} - \frac{x}{2\sqrt{2-x}} & \text{se } x < 0 \\ -\frac{2x}{1+x^4} & \text{se } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{4-3x}{2\sqrt{2-x}} & \text{se } x < 0 \\ -\frac{2x}{1+x^4} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

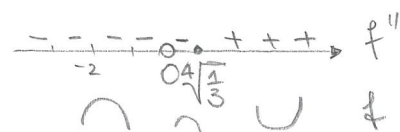
Poiché  $f$  è continua in  $x=0$ , dal corollario del teorema di de L'Hopital si ha  $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4-3x}{2\sqrt{2-x}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ,  $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x}{1+x^4} = 0$

quindi  $f$  non è derivabile in  $x=0$ .

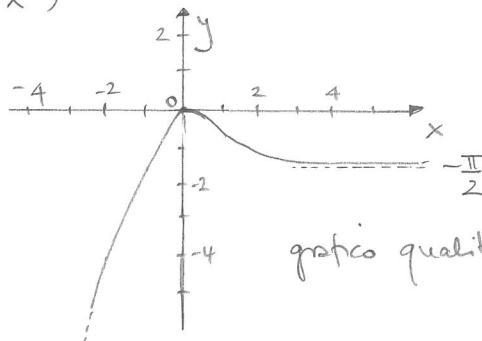
$x=0$  è un pt. angoloso per  $f$ .



• 
$$f''(x) = \begin{cases} \frac{3x-8}{4(2-x)^{3/2}} & \text{se } x < 0 \\ \frac{2(3x^4-1)}{(1+x^4)^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$



$\text{dom } f'' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



$x = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$  pt. di flesso per  $f$

grafico qualitativo di  $f$



ii)

$$f(x) = \frac{e^{|x|}}{e^x - e}$$

•  $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

• segno di  $f$

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$     $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$     $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$     $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

$x=1$  asintoto verticale,  $y=1$  asintoto orizz. per  $f$ , per  $x \rightarrow +\infty$ .

•  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{e^x - e} & \text{se } x < 0 \\ \frac{e^x}{e^x - e} & \text{se } x > 0, x \neq 1 \end{cases}$  (ricordando che  $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$ )

segue  $f'(x) = \begin{cases} \frac{-e^{-x}(e^x - e) - e^{-x} \cdot e^x}{(e^x - e)^2} = \frac{e^{-x+1} - 2}{(e^x - e)^2} & \text{se } x < 0 \\ \frac{e^x(e^x - e) - e^x \cdot e^x}{(e^x - e)^2} = \frac{-e^{x+1}}{(e^x - e)^2} & \text{se } x > 0, x \neq 1 \end{cases}$

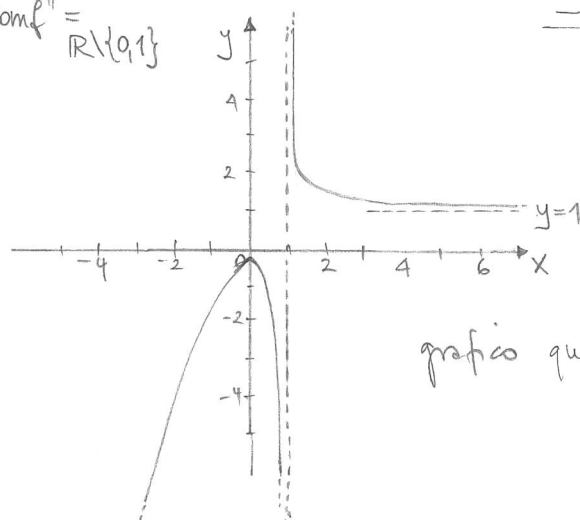
$\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$f'_-(0) = \frac{e-2}{(1-e)^2}$     $f'_+(0) = \frac{-e}{(1-e)^2}$

$x=0$  pt. angoloso per  $f$

•  $f''(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}(4e^{2x} - 3e^{x+1} + e^2)}{(e^x - e)^3} & \text{se } x < 0 \\ \frac{e^{x+1}(e^x + e)}{(e^x - e)^3} & \text{se } x > 0, x \neq 1 \end{cases}$

$\text{dom } f'' = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$



sign chart for  $f''$

grafico qualitativo per  $f$



iii)  $f(x) = \sqrt{|x|} \log x^2$

Ricordate:  $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$\forall x \neq 0 \quad \log x^2 = 2 \log |x|$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \log x^2 = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \log x^2 = +\infty$ .

$\text{dom } g' = ]0, +\infty[$   $g'(x) = (\sqrt{x} \log x^2)' = \frac{\log x}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{\log x + 2}{\sqrt{x}}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \log x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^2}$  pt. critico per  $g$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = -\infty$

$x = \frac{1}{e^2}$  pt. di minimo loc. stretto per  $g$

$f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{1}{e} \log \frac{1}{e^4} = -\frac{4}{e}$

$x=0$  è una cuspidi per  $f$

$\text{dom } g'' = ]0, +\infty[$   $g''(x) = \frac{\frac{1}{x}(\sqrt{x}) - (\log x + 2) \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$

$= \frac{1 - \log x - 2}{2x^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\log x - 1}{2x^{\frac{3}{2}}}$

$g''(x) > 0$  for  $x < 1$ ,  $g''(x) < 0$  for  $x > 1$

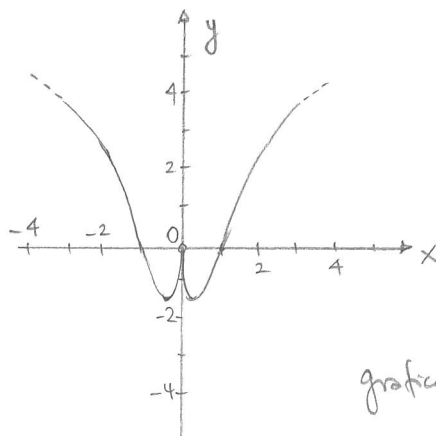


grafico qualitativo per  $f$

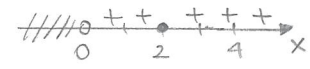




iv)  $f(x) = \frac{\sqrt{|x^2 - 4|}}{x}$

•  $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$   $f$  è dispari!

• Basta studiare  $g(x) = f|_{]0, +\infty[}$

• Segno di  $g$  : 

•  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$   $x=0$  asintoto verticale

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$   $y=1$  asintoto orizzontale per  $g$ , per  $x \rightarrow +\infty$ .

•  $g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} & \text{se } 0 < x < 2 \\ \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$   $g$  è continua in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$   
essendo composizione  
e rapporto di funzioni continue

•  $g'(x) = \begin{cases} \frac{\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} \cdot x - \sqrt{4-x^2}}{x^2} & \text{se } 0 < x < 2 \\ \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-4}} \cdot x - \sqrt{x^2-4}}{x^2} & \text{se } x > 2 \end{cases}$

$= \begin{cases} \frac{-4}{x^2 \sqrt{4-x^2}} & \text{se } 0 < x < 2 \\ \frac{4}{x^2 \sqrt{x^2-4}} & \text{se } x > 2 \end{cases}$

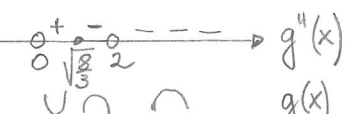
Essendo  $g$  continua in  $x=2$ , risulta  $g'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-4}{x^2 \sqrt{4-x^2}} = -\infty$

$g'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4}{x^2 \sqrt{x^2-4}} = +\infty$ .

Risulta che  $x=2$  è una cuspidi per  $g$  (e quindi per  $f$ ).

•  $g''(x) = \begin{cases} \frac{-4 \left[ -2x\sqrt{4-x^2} - x^2 \cdot \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} \right]}{x^4 (4-x^2)} & \text{se } 0 < x < 2 \\ \frac{4 \left[ -2x\sqrt{x^2-4} - x^2 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} \right]}{x^4 (x^2-4)} & \text{se } x > 2 \end{cases}$

$= \begin{cases} \frac{-4 \left[ -8x + 3x^3 \right]}{x^4 (4-x^2)^{3/2}} & \text{se } 0 < x < 2 \\ \frac{4 \left[ -3x^3 + 8x \right]}{x^4 (x^2-4)^{3/2}} & \text{se } x > 2 \end{cases}$

$= \begin{cases} \frac{-4(-8+3x^2)}{x^3 (4-x^2)^{3/2}} & \text{se } 0 < x < 2 \\ \frac{-4(-8+3x^2)}{x^3 (x^2-4)^{3/2}} & \text{se } x > 2 \end{cases}$  

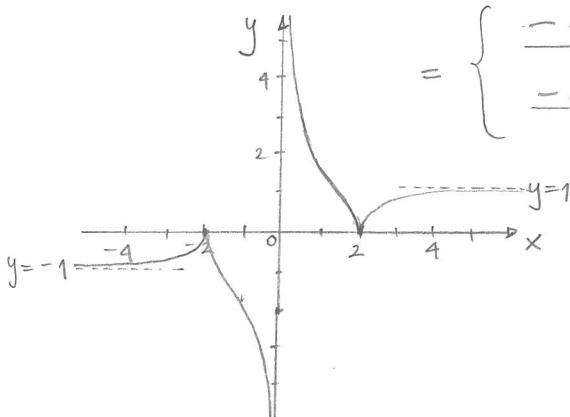


grafico qualitativo di  $f$



v)  $f(x) = \arctan \frac{1}{x} + |x+1|$

•  $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$= \begin{cases} \arctan \frac{1}{x} - x - 1 & \text{se } x < -1 \\ \arctan \frac{1}{x} + x + 1 & \text{se } x > -1 \\ & x \neq 0 \end{cases}$$

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$y = -x - 1$   
asintoto obliquo  
per  $f$ , per  $x \rightarrow -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2} + 1$

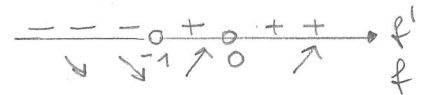
$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2} + 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$y = x + 1$   
asintoto obliquo  
per  $f$ , per  $x \rightarrow +\infty$ .

• 
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 & \text{se } x < -1 \\ \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 & \text{se } x > -1 \\ & x \neq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{-x^2 - 2}{x^2 + 1} & \text{se } x < -1 \\ \frac{x^2}{x^2 + 1} & \text{se } x > -1 \\ & x \neq 0 \end{cases}$$



$f$  è continua in  $x = -1$ ; allora  $f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x^2 - 2}{x^2 + 1} = -\frac{3}{2}$ ,

$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{x^2 + 1} = \frac{1}{2}$ ; quindi  $x = -1$  è un pt. angoloso per  $f$ .

Notiamo inoltre che  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$ .

• 
$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} & \text{se } x < -1 \\ \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} & \text{se } x > -1 \\ & x \neq 0 \end{cases}$$

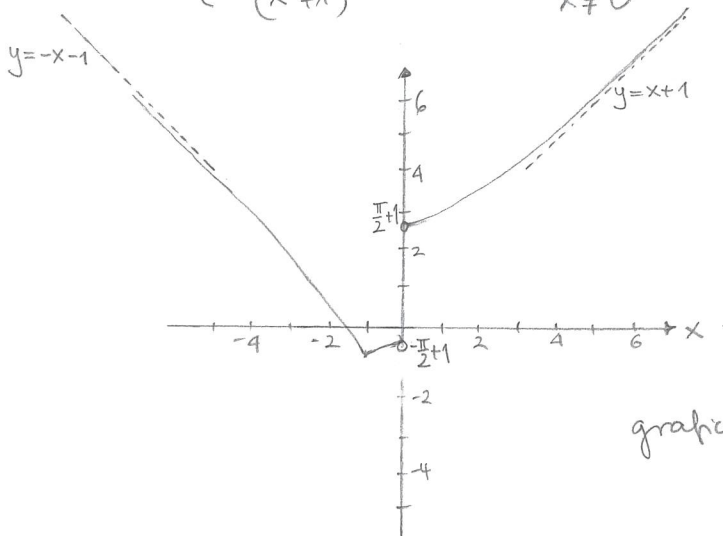
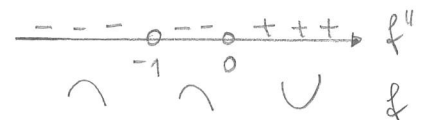


grafico qualitativo di  $f$

