

PIAZZA 4

4.1) • $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\log(x-2)}{e^{\frac{1}{x-2}}}$: notiamo che

- il limite si presenta nella forma $\frac{\infty}{\infty}$;
- tutte le funzioni coinvolte sono derivabili in un intorno destro di 2;
- la derivata del denominatore è $\neq 0$ in un intorno destro di 2.

Poiché

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[\log(x-2)]'}{[e^{\frac{1}{x-2}}]'} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\frac{1}{x-2}}{e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-2)}{e^{\frac{1}{x-2}}} = 0,$$

il teorema di de L'Hopital garantisce che il $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\log(x-2)}{e^{\frac{1}{x-2}}}$ esiste e vale 0.

Analogamente (anche nel caso $\frac{0}{0}$) si dovrebbe verificare l'applicabilità del teorema di de L'Hopital prima di procedere anche negli altri esercizi. Tale verifica viene può omissa in seguito.

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log(-\log x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(-\log x)}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$
(0 · ∞)

Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\log(-\log x)]'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{-\log x} \cdot (-\frac{1}{x})}{-\frac{1}{x^2}} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{\log x} = 0,$

possiamo concludere grazie al teorema di de L'Hopital che $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log(-\log x) = \underline{\underline{0}}$.

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \log x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x^3}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^3}{3} = \underline{\underline{0}}.$
(0 · ∞)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 - \sin x}{\cos x + (x - \frac{\pi}{2})} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{-\cos x}{-\sin x + 1} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{-\cos x} \stackrel{(0/0)}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{-\cos x} = \underline{\underline{-\infty}}.$$

□

$$\text{ii) } \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}} \stackrel{(0 \cdot \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{2}{x}} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{2} = \underline{\underline{+\infty}}.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x - 4}{(x-2)^3} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2}{3(x-2)^2} = \underline{\underline{+\infty}}.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 1} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 6x}{2x} = \underline{\underline{\frac{-3}{2}}}.$$

4.2) $f(x) = \log(1+2x) \cos x$: ricordiamo che

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} + o(t^5) \text{ per } t \rightarrow 0,$$

da cui, ponendo $t=2x$, si ha

$$\log(1+2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^4 + \frac{32}{5}x^5 + o(x^5) \text{ per } x \rightarrow 0.$$

$$\text{D'altra parte, } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(1+2x) \cos x = \left[2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^4 + \frac{32}{5}x^5 + o(x^5) \right] \cdot \\ &\quad \cdot \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right] \\ &= 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^4 + \frac{32}{5}x^5 - x^3 + x^4 - \frac{4}{3}x^5 + \frac{x^5}{12} + o(x^5) \\ &= 2x - 2x^2 + \frac{5}{3}x^3 - 3x^4 + \frac{103}{20}x^5 + o(x^5) \text{ per } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Il polinomio cercato è quindi

$$P_5(x) = 2x - 2x^2 + \frac{5}{3}x^3 - 3x^4 + \frac{103}{20}x^5.$$

■

4.3) i) $(x^2 - 2x^3) \sin 3x + 3(\cos x - e^x)^3$:

ricordiamo che $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$ per $t \rightarrow 0$, da cui, ponendo $t = 3x$, si ha

$$\sin 3x = 3x - \frac{27}{6}x^3 + o(x^3) \text{ per } x \rightarrow 0, \text{ ossia}$$

$$\sin 3x = 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3), \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Abbiamo inoltre

$$\begin{aligned} (\cos x - e^x)^3 &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) - 1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^3 \\ &= \left(-x - x^2 + o(x^2)\right)^3 \text{ per } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Otteniamo allora

$$\begin{aligned} (x^2 - 2x^3) \sin 3x + 3(\cos x - e^x)^3 &= \\ &= (x^2 - 2x^3) \left(3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3)\right) - 3(x + x^2 + o(x^2))^3 \\ &= \cancel{3x^3} - 6x^4 + o(x^4) - \cancel{3x^3} - 9x^4 + o(x^4) \\ &= -15x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Risulta allora che l'ordine di infinitesimo è 4 e la parte principale $-15x^4$. $\square$

ii) $2 \log(\cos x) + \sin^2 x$:

ricordiamo che $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ per $x \rightarrow 0$;

$$\text{abbiamo } \log(\cos x) = \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) =$$

$$\begin{aligned} \log(1+t) &= t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \text{ per } t \rightarrow 0 \\ &\xrightarrow{t = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \frac{1}{2}\left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right]^2 + o(x^4) \\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4). \end{aligned}$$

Otteniamo

$$\begin{aligned} 2 \log(\cos x) + \sin^2 x &= 2\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)\right) + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 \\ &= \cancel{-x^2} - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4) + \cancel{x^2} - \frac{x^4}{3} + o(x^4) = -\frac{1}{2}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Risulta allora che l'ordine di infinitesimo è 4 e la p.p. $-\frac{1}{2}x^4$. $\blacksquare$

4.4) i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{3x} - (1+x)^3}{\sin x^2} :$

Poiché $\sin x^2 = x^2 + o(x^2)$, per $x \rightarrow 0$, dobbiamo calcolare lo sviluppo del secondo ordine della funzione al numeratore.

Poiché $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, per $t \rightarrow 0$, si ha $e^{3x} = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$, e si ha

$$\begin{aligned} \frac{e^{3x} - (1+x)^3}{\sin x^2} &= \frac{1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + o(x^2) - (1 + 3x + 3x^2 + x^3)}{x^2 + o(x^2)} = \\ &= \frac{\frac{9}{2}x^2 - 3x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)}. \end{aligned}$$

Ne segue che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{3x} - (1+x)^3}{\sin x^2} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$.

□

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} - \cos \frac{1}{x}}{\log(1 + \frac{1}{x^2})} :$

Poiché $\log(1 + \frac{1}{x^2}) = \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})$, per $x \rightarrow +\infty$, dobbiamo calcolare lo sviluppo del secondo ordine delle funzioni al numeratore.

Poiché $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, per $t \rightarrow 0$, e $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \rightarrow 0$, si ha $e^{\frac{1}{x^2}} = 1 + \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})$, per $x \rightarrow +\infty$ e $\cos \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})$ per $x \rightarrow +\infty$.

Ne segue che

$$\frac{e^{\frac{1}{x^2}} - \cos \frac{1}{x}}{\log(1 + \frac{1}{x^2})} = \frac{1 + \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2}) - 1 + \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})} = \frac{\frac{3}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})},$$

e quindi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} - \cos \frac{1}{x}}{\log(1 + \frac{1}{x^2})} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$.

□

iii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{1+x} - 1) \sin^2 x}{(2+x)^3 \log^2(1 + \sqrt{x^3})}$

Poiché $(2+x)^3 \log^2(1 + \sqrt{x^3}) = 8x^3 + o(x^3)$, per $x \rightarrow 0^+$, dobbiamo calcolare lo sviluppo del terzo ordine della funzione al

numeratore.

Poiché $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$, per $x \rightarrow 0$, e
 $\sin^2 x = x^2 + o(x^2)$, per $x \rightarrow 0$, si ha

$$\frac{(\sqrt{1+x} - 1) \sin^2 x}{(2+x)^3 \log^2(1+\sqrt{x^3})} = \frac{\left(\frac{1}{2}x + o(x)\right)(x^2 + o(x^2))}{8x^3 + o(x^3)} = \frac{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{8x^3 + o(x^3)},$$

e quindi $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{1+x} - 1) \sin^2 x}{(2+x)^3 \log^2(1+\sqrt{x^3})} = \underline{\underline{\frac{1}{16}}}$.

□

$$\begin{aligned} \text{iv) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+1)^2 \sin(x-1)}{\sqrt{x} \log x} &= 4 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{\log x} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\log(1+x)} = \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x)}{x + o(x)} = \underline{\underline{4}}. \end{aligned}$$

■

4.5) i) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^2+2}{x^4+2} \right)^n$: possiamo semplicemente osservare che è una
serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ con $q = \frac{x^2+2}{x^4+2}$, che
risulta convergente se e solo se $-1 < \frac{x^2+2}{x^4+2} < 1$, quindi
 $\Leftrightarrow x^2+k < x^4+k$ (nota: $x^4+2 > 0$!) sempre verificato
 $\Leftrightarrow 0 < x^2(x^2-1) \Leftrightarrow x^2-1 > 0$
 $\Rightarrow \underline{\underline{x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[}}.$

(si poteva anche applicare il criterio della radice n-esima a

$\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{x^2+2}{x^4+2} \right)^n}_{a_n}$: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{x^2+2}{x^4+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l = \frac{x^2+2}{x^4+2} < 1$ per avere
la convergenza della serie; notiamo che se $\frac{x^2+2}{x^4+2} = 1$,
non è soddisfatta la cond. nec. per la convergenza) □.

ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right) n^x$: osserviamo che
 $\cos \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4!n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, per $n \rightarrow +\infty$
 $\sqrt{1 - \frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, per $n \rightarrow +\infty$

e quindi $\left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right) n^x \sim \left(\frac{1}{4!} + \frac{1}{8} \right) \frac{1}{n^2} \cdot n^x = \frac{1}{6n^{2-x}}$ per $n \rightarrow +\infty$.

Allora, per il criterio del confronto asintotico risulta che la serie data è convergente se e solo se $2-d > 1$, ossia $d < 1$. $\square$

iii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{d+1}}{\arctg \frac{1}{\sqrt{n}} + \sin \frac{1}{n}}$: osserviamo che

$$\arctg \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

$$\sin \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

e $\arctg \frac{1}{\sqrt{n}} + \sin \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (nota: $\sin \frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ per $n \rightarrow +\infty$)

Quindi $\frac{n^{d+1}}{\arctg \frac{1}{\sqrt{n}} + \sin \frac{1}{n}} \sim \frac{n^{d+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{n^{-\frac{1}{2}-d-1}}$ per $n \rightarrow +\infty$

Per il criterio del confronto asintotico la serie data risulta convergente se e solo se $-d - \frac{3}{2} > 1$, ossia $d < -\frac{5}{2}$. $\blacksquare$

4.6) i) $\sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{3}{4}\right)^n$: Poniamo $a_n = n \left(\frac{3}{4}\right)^n > 0$. Allora $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n} \left(\frac{3}{4}\right) \rightarrow \frac{3}{4} (< 1)$

Per il criterio della radice n -esima possiamo concludere che la serie data è convergente. $\square$

ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\log 3)^n}{n^2 + |\sin n|}$: Poniamo $a_n = \frac{(\log 3)^n}{n^2 + |\sin n|} > 0$. Allora $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\log 3}{\sqrt[n]{n^2 + |\sin n|}} \rightarrow \log 3$

Poiché $\log 3 > \log e = 1$, per il criterio della radice n -esima possiamo concludere che la serie data è divergente positivamente. $\square$

iii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^2 + |\sin n|}$: Poiché $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{n^\beta} = 0 \quad \forall \beta > 0$, abbiamo $\square$

per esempio, $0 < \frac{\log n}{n^{\frac{1}{2}}} < 1 \quad \forall n \geq \bar{n}$ e quindi

$$0 < \frac{\log n}{n^2 + |\sin n|} < \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2 + |\sin n|} < \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \quad \forall n \geq \bar{n}.$$

Poiché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < +\infty$, per il criterio del confronto risulta che la serie data è convergente. $\square$

4.7) i) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n} + \log n^2}$: Poniamo $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \log n^2} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$,
decescente (anzi, poiché $\sqrt{n}$ e $\log n^2$ sono
funzioni crescenti) e $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Per il criterio di Leibniz, la serie data risulta convergente.

Notiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n} + \log n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \log n^2}$.

Poiché $\frac{1}{\sqrt{n} + \log n^2} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$, per $n \rightarrow +\infty$ (ricordare che

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n^2}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \log n}{\sqrt{n}} = 0$!), per il criterio del confronto

asintotico la serie data non è assolutamente convergente,
poiché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ è divergente positivamente. $\square$

ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos n}{3n^2 + 4\sqrt{n}}$: Basta osservare che $\left| (-1)^n \frac{\cos n}{3n^2 + 4\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{3n^2}$

$\forall n \geq 1$. Poiché la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n^2} < +\infty$, per il criterio del
confronto la serie data è assolutamente convergente, e
quindi anche (semplicemente) convergente. $\blacksquare$

4.8) i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(\sqrt{n}+2)3^n}$: poniamo $a_n = \frac{1}{(\sqrt{n}+2)3^n} > 0$ e la serie data si riscrive come

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$. Si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\sqrt{n}+2)3^n}{(\sqrt{n+1}+2)3^{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l = \frac{1}{3}$ e

il raggio di convergenza risulta $r = 3$; quindi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{n}+2)3^n} x^n$
risulta convergente $\forall -3 < x < 3$.

Per $x = -3$ si ha $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{(\sqrt{n}+2)3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+2}$ che converge per
il criterio di Leibniz.

Per $x = 3$ si ha $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{(\sqrt{n}+2)3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+2}$ che diverge positiv.

poiché $\frac{1}{\sqrt{n}+2} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$, per $n \rightarrow +\infty$, (per il criterio del confronto
asintotico e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$).

In definitiva, la serie data converge se e solo se $x \in [-3, 3[$. $\square$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \frac{1}{n^2})^{n^2}}{n\sqrt{n}} x^n$: poniamo $a_n = \frac{(1 - \frac{1}{n^2})^{n^2}}{n\sqrt{n}} > 0$; la serie data si riscrive come $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Si ha

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{(1 - \frac{1}{n^2})^n}{\sqrt[n]{n^{3/2}}} = \frac{e^{n \log(1 - \frac{1}{n^2})}}{(\sqrt[n]{n})^{3/2}} = \frac{e^{-\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})}}{(\sqrt[n]{n})^{3/2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

e il raggio di convergenza risulta $r=1$; quindi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \frac{1}{n^2})^{n^2}}{n\sqrt{n}} x^n$ risulta convergente $\forall -1 < x < 1$.

Notiamo che, per $x = -1$, $x = 1$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \frac{1}{n^2})^{n^2}}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^2 \log(1 - \frac{1}{n^2})}}{n^{3/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-1 + o(1)}}{n^{3/2}}$$

Perché $\frac{e^{-1 + o(1)}}{n^{3/2}} \sim \frac{1}{e \cdot n^{3/2}}$ per $n \rightarrow +\infty$, per il criterio del confronto asintotico e la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, segue che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ è convergente anche per $x = -1$ e $x = 1$. L'insieme di convergenza della serie data è quindi $[-1, 1]$. $\square$

iii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{(x-1)^n}{2^n}$: poniamo $a_n = \frac{n+1}{(n+2)2^n} > 0 \forall n \geq 1$, e la serie data si riscrive come $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$.

Si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{(n+3)2^{n+1}} \cdot \frac{(n+2)2^n}{n+1} \rightarrow l = \frac{1}{2}$ e il raggio di convergenza risulta $r=2$; quindi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ risulta convergente $\forall -2 < x-1 < 2$, ossia $-1 < x < 3$.

Per $x = -1$, si ha $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2} (-1)^n$. Poiché $|\frac{n+1}{n+2} (-1)^n| = \frac{n+1}{n+2} \rightarrow 1$, non è soddisfatta la cond. nec. (*) per la convergenza della serie, e così anche per $x = 1$.

(*) Ricordiamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |b_n| = 0$.

In conclusione, l'insieme di convergenza della serie data è $]-1, 3[$. $\blacksquare$

4.9) i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x^2)^n}{n}$: poniamo $t = 1-x^2$, e abbiamo la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$. Posto $a_n = \frac{1}{n}$, si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ e quindi il raggio di convergenza risulta $r = 1$, ossia la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$ risulta convergente $\forall -1 < t < 1$.
Per $t = -1$ si ha $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ che converge grazie al criterio di Leibniz,

Per $t = 1$, si ha la serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ che diverge positivamente.

In definitiva, la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} < +\infty \Leftrightarrow t \in [-1, 1[$.

Segue allora immediatamente che la serie data risulta convergente

$\forall x: -1 \leq 1-x^2 < 1$, ossia $\forall x \in \underline{[-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \setminus \{0\}}$.

ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x-1)^n}{n^\beta (3^n+1)}$ al variare di $\beta \in \{1, 2\}$: poniamo $t = 2x-1$, e abbiamo la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n^\beta (3^n+1)}$. Posto $a_n = \frac{1}{n^\beta (3^n+1)}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^\beta (3^n+1)}{(n+1)^\beta (3^{n+1}+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \quad (\text{per } \beta \in \{1, 2\}) \text{ e quindi}$$

il raggio di convergenza risulta $r = 3$, ossia la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n^\beta (3^n+1)}$ $\forall -3 < t < 3$.

Per $\underline{\beta=1}$: $\boxed{t=-3}$ si ha $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{n(3^n+1)}$ che converge per il criterio di Leibniz.

$$(\text{oss. } g(x) = \frac{3^x}{x(3^x+1)} > 0 \quad \forall x > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0,$$

$$\text{e } g(x) \downarrow \text{ - infatti } g'(x) = \frac{-3^x(3^x+1-x \log 3)}{[x(3^x+1)]^2} < 0 \quad \forall x > 0$$

poiché $\underbrace{3^x+1}_{\text{funz. crescente}} \geq \underbrace{x \log 3 + 2}_{\text{eq. retta tg al grafico di } g(x) \text{ in } x=0} > x \log 3 \quad \forall x > 0$

$\boxed{t=3}$ si ha $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n(3^n+1)}$ che diverge positivamente.

poiché $\frac{3^n}{n(3^n+1)} \sim \frac{1}{n}$ per $n \rightarrow +\infty$, e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

Quindi, per $\beta = 1$, la serie data è convergente se e solo se $-3 \leq 2x-1 < 3$, ossia $x \in [-1, 2[$. $\square$

Per $\beta = 2$: $t = -3$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{n^2(3^n+1)}$. Risulta
 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n 3^n}{n^2(3^n+1)} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$. Quindi la serie è

assolutamente convergente, e quindi convergente.

Per $t = 3$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2(3^n+1)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$ e quindi la convergenza della serie.

In definitiva, la serie data è convergente se e solo se $-3 \leq 2x-1 \leq 3$, ossia $x \in [-1, 2]$. $\blacksquare$