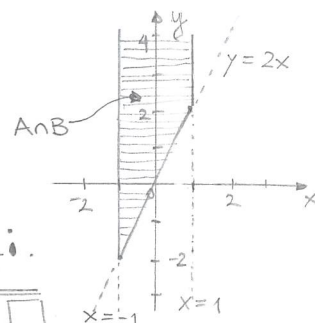


Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
 CdL in Informatica - CdL in Ingegneria dell'Informazione e delle Comunicazioni
 CdL in Ingegneria dell'Informazione e Organizzazione d'Impresa
 PRIMA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA 1
 a.a. 2016-2017 - Trento, 4 novembre 2016

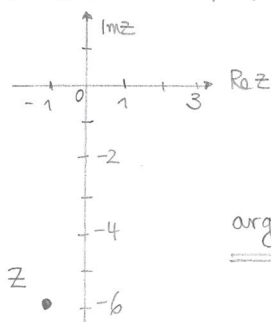
FILA (A)

21) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 2x\}$



22) $z = 3+i$ $\frac{1}{\bar{z}+1} = \frac{1}{3-i+1} = \frac{1}{4-i} = \frac{1}{4-i} \cdot \frac{4+i}{4+i} = \frac{4+i}{17} = \frac{4}{17} + \frac{1}{17}i$

23) $z = -1-6i$



$\arg z \in \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right]$

24) $a_n = \log_2 \left(1 - \frac{1}{n} \right)$, $n \geq 2$: $1 - \frac{1}{n} \nearrow$ $\log_2 x \nearrow$ in $]0, +\infty[$

$\Rightarrow \log_2 \left(1 - \frac{1}{n} \right) \nearrow$

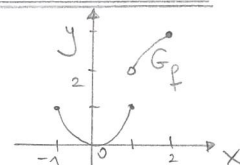
25) $A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2-1} < 2\}$: $\sqrt{x^2-1} < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x^2-1 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 1 \\ x^2 < 5 \end{cases}$

$\Rightarrow A =]-\sqrt{5}, -1] \cup [1, \sqrt{5}[$. Risultato $\inf(A \cap [0, +\infty[) = 1$

$\sup(A \cap [0, +\infty[) = \sqrt{5}$

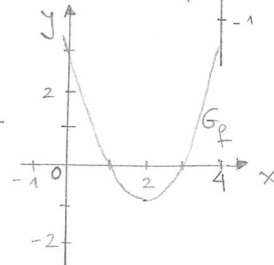
26) $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in [-1, 1] \\ 2 + \log_2 x & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$

$f([-1, 2]) = [0, 1] \cup [2, 3]$

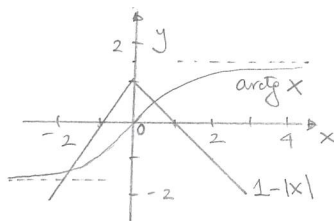


27) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$

$I = [2, +\infty[$



28) $1 - |x| = \arctg x$



nr. di soluzioni è 2:

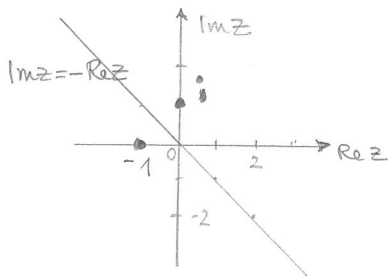
Una soluzione è negativa,
 Una è positiva.

29) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 2^x - 2$ $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$; si ha $(g \circ f)(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 1 \\ 2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

30) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2}{|x|-2} = -\infty$.
 ...infinitesimo negativo

$$b1) i) |z+1| + |z|^3 = |z-i| + 8 \Leftrightarrow \begin{cases} |z+1| = |z-i| \\ |z|^3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow |z| = 2.$$

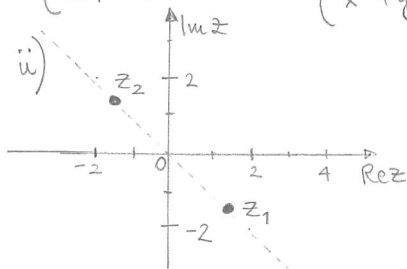
Ora $|z+1| = |z-i|$ può essere risolto rapidamente graficamente, ricordando che le soluzioni di quest'equazione sono tutti gli $z \in \mathbb{C}$ che sono equidistanti da $z = -1$ e $z = i$. Risultano gli $z \in \mathbb{C}$: $\text{Im} z = -\text{Re} z$.



L'eq. $|z+1| = |z-i|$ può essere risolta anche facilmente ponendo $z = x + iy$. Infatti risulta $(x+1)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2$, da cui $x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1$, ossia $y = -x$. In definitiva,

$$\begin{cases} |z+1| = |z-i| \\ |z| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 2x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = \pm \sqrt{2} \end{cases}.$$

Ne segue:
 $\underline{z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i}$
 $\underline{z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i}.$ $\square$



$$\underline{z_1} = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$\underline{z_2} = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right).$$

$$\text{Infine } \underline{z_1^5} = 2^5 \left(\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right) \right)$$

$$= 16 \underline{z_2};$$

$$\underline{z_2^5} = 2^5 \left(\cos\left(\frac{15\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{15\pi}{4}\right) \right)$$

$$= 16 \underline{z_1}.$$

b2) Sia $P(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Si ha facilmente che $P(1)$ è vero. (infatti, per $n=1$, si ha $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$).

Resta da provare che $\forall n \geq 1$, supposto $P(n)$ vero, risulta $P(n+1)$

vero. Ora

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \stackrel{\text{ip. induttiva}}{=} 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= 1 - \frac{(n+2) - 1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= 1 - \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2},$$

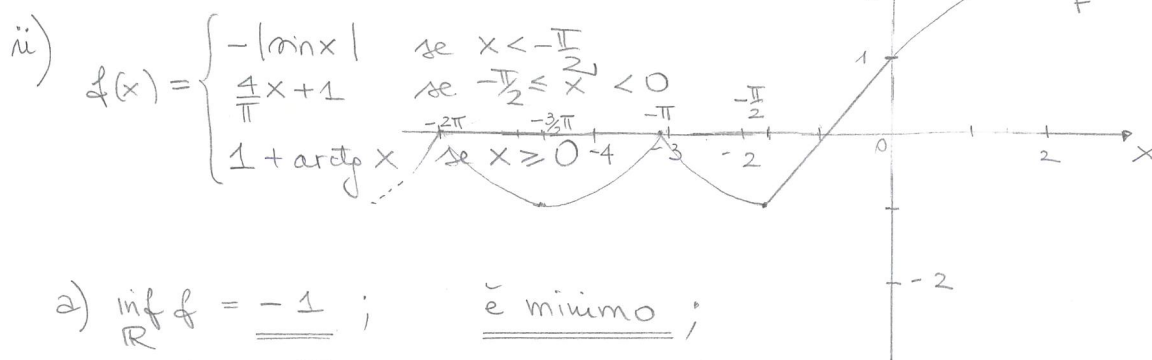
provando che $P(n+1)$ è vero. Possiamo quindi assumere che $P(n)$ è vero $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. ■

b3) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$$f(x) = \begin{cases} -|\sin x| & \text{se } x < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{4}{\pi}x + a & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \\ 1 + \arctan x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Basta verificare che esiste un $a \in \mathbb{R}$ per cui risulta continua f nel pt. $x = -\frac{\pi}{2}$ e nel pt. $x = 0$; ossia che esiste un $a \in \mathbb{R}$ tale che

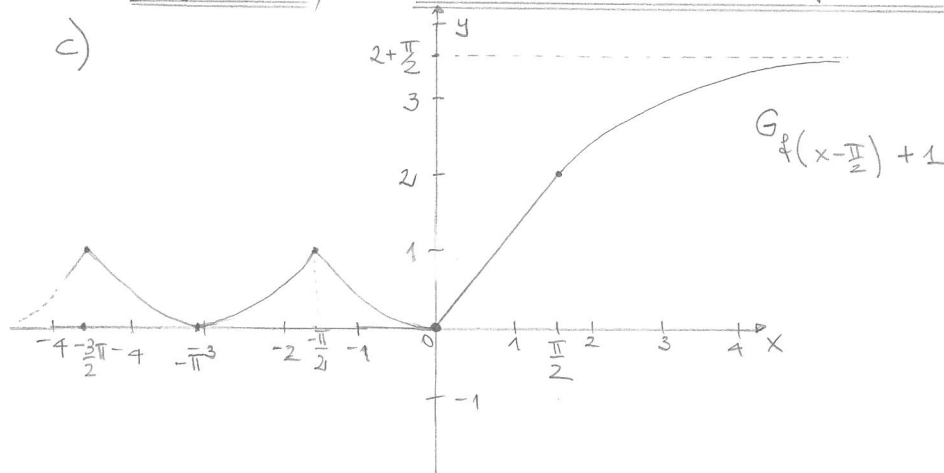
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} (-|\sin x|) &= f(-\frac{\pi}{2}) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} (\frac{4}{\pi}x + a) \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (\frac{4}{\pi}x + a) &= f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \arctan x) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\Leftrightarrow -1 = -2 + a \\ &\Leftrightarrow a = 1 \\ &\Leftrightarrow a = 1 \end{aligned}$$

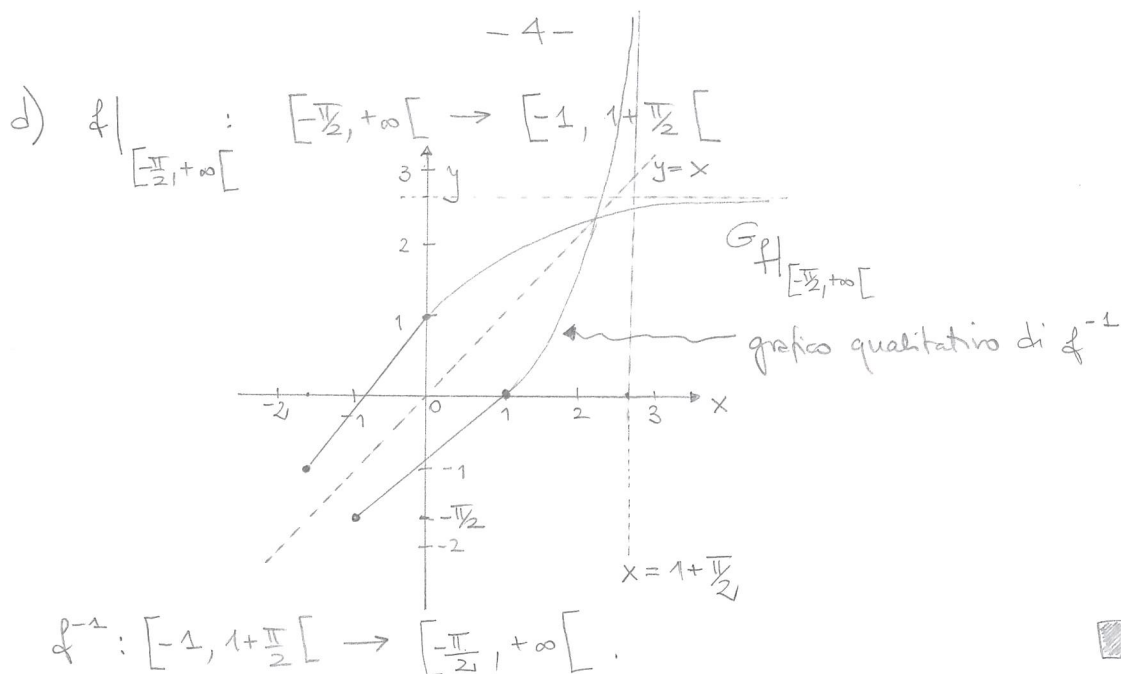
Risulta $a = 1$.



a) $\inf_{\mathbb{R}} f = -1$; è minimo ;
 $\sup_{\mathbb{R}} f = 1 + \frac{\pi}{2}$; non è massimo.

b) $\underline{x_k = -\frac{\pi}{2} - k\pi}$, $\underline{k \in \mathbb{N}, k \geq 0}$ sono pt. di min. loc. stretto ;
 $\underline{x_k = -k\pi}$, $\underline{k \in \mathbb{N}, k \geq 1}$ sono pt. di max loc. stretto.





b4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{nd} \arctan n}{(2^{3n} - 1)n}$

Notiamo che se $\alpha \leq 0$ si ha immediatamente che il limite vale 0.

Infatti, $\alpha = 0$

$\frac{\arctan n}{(2^{3n} - 1)n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$;

$\alpha < 0$

$\frac{2^{-nd} \arctan n}{(2^{3n} - 1)n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Se $\alpha > 0$, allora $\frac{2^{nd} \arctan n}{(2^{3n} - 1)n} = \frac{2^{n(\alpha-3)} \arctan n}{(1 - \frac{1}{2^{3n}})n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ se $\alpha \leq 3$
 $\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ se $\alpha > 3$.

Infatti, se $\alpha \leq 3$, si ha $\frac{\arctan n}{2^{n(3-\alpha)}(1 - \frac{1}{2^{3n}})n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,

e, per $\alpha > 3$, $(2^{\alpha-3})^n$ è un infinito di ordine superiore all'infinito n , per $n \rightarrow +\infty$, e $\arctan n \rightarrow \frac{\pi}{2}$ per $n \rightarrow +\infty$.

Riassumendo, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{nd} \arctan n}{(2^{3n} - 1)n} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \leq 3 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 3. \end{cases}$

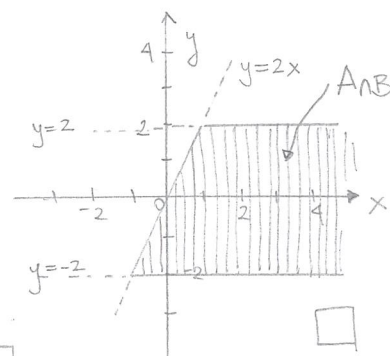
b5) i) $f(x) = o(1)$ per $x \rightarrow x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$. □

ii) L'implicazione presentata è falsa! Infatti $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 5$ non implica necessariamente che $f(0) > 4$. ■

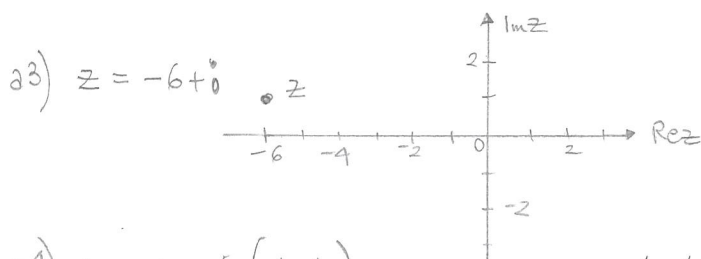
b6) $\lambda = \sup A \iff \begin{cases} \text{i) } \forall x \in A, x \leq \lambda \\ \text{ii) } \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A : \lambda - \varepsilon < x_\varepsilon. \end{cases}$ ■

FILA (B)

21) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq 2\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 2x\}$



22) $z = 1 + 3i$ $\frac{1}{\bar{z}+1} = \frac{1}{1-3i+1} = \frac{1}{2-3i} \cdot \frac{2+3i}{2+3i} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$



23) $z = -6 + i$

$\arg z \in]\frac{3\pi}{4}, \pi[$

24) $a_n = \arcsin(1 - \frac{1}{n})$, $n \geq 1$; $1 - \frac{1}{n} \nearrow$ $\arcsin x \nearrow$ in $[-1, 1]$

$\Rightarrow \arcsin(1 - \frac{1}{n}) \nearrow$

25) $A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - 1} < 1\}$: $\sqrt{x^2 - 1} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 - 1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 1 \\ x^2 < 2 \end{cases}$

$\Rightarrow A = [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$. Risulta $\inf(A \cap]-\infty, 0]) = -\sqrt{2}$

$\sup(A \cap]-\infty, 0]) = -1$

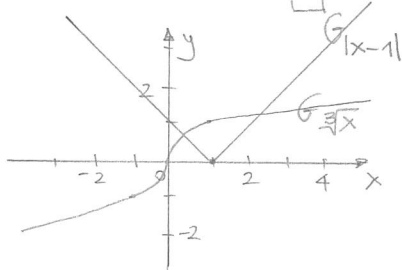
26) $f: [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x & \text{se } x \in [-2, 0] \\ x^2 - 1 & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

$f([-2, 1]) = [-1, 0] \cup [1, 4]$

27) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 + 2x - 2 = (x+1)^2 - 3$

$I =]-\infty, -1]$

28) $|x-1| = \sqrt[3]{x}$

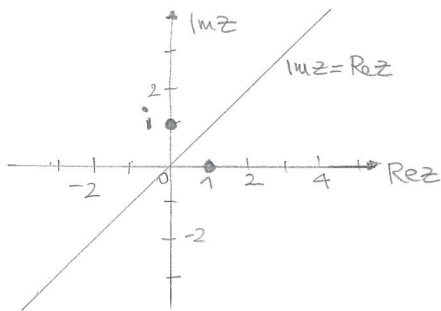


nr. delle soluzioni è 2:
entrambe le soluzioni sono positive.

29) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 - 1$ $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ -2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$; si ha $(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in]-1, 1[\\ -2 & \text{se } x \leq -1 \text{ o } x \geq 1 \end{cases}$

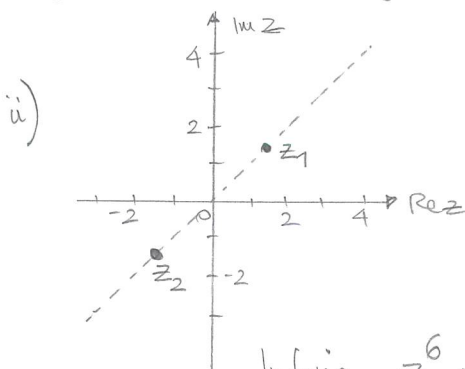
30) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2}{x^2 - 4}$ $= +\infty$
infinitamente positivo

$$b1) i) |z|^3 + |z-1| = 8 + |z-i| \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3 = 8 \Leftrightarrow |z| = 2 \\ |z-1| = |z-i| \end{cases}$$



Le soluzioni dell'eq. $|z-1| = |z-i|$ sono tutti gli $z \in \mathbb{C}$ che sono equidistanti da $z=1$ e $z=i$. Risultano gli $z \in \mathbb{C}$: $\text{Im} z = \text{Re} z$.

A questa conclusione arriviamo facilmente anche ponendo $z = x + iy$. Infatti $|z-1| = |z-i| \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2$, da cui $x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1$, ossia $y = x$. In definitiva, $\begin{cases} |z-1| = |z-i| \\ |z| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 2x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$. Ne segue $\underline{z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i}$, $\underline{z_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i}$. $\square$



$$\underline{z_1 = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)}$$

$$\underline{z_2 = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)}$$

$$\text{Infine } \underline{z_1^6 = 2^6 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -64i}$$

$$\underline{z_2^6 = 2^6 \left(\cos \frac{15\pi}{2} + i \sin \frac{15\pi}{2} \right) = -64i} \quad \blacksquare$$

b2) Sia $\mathcal{P}(n) = \sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$.

Si ha facilmente che $\mathcal{P}(0)$ è vero (infatti, per $n=0$, si ha $1=1$).

Rimane da provare che $\forall n \geq 0$, supposto $\mathcal{P}(n)$ vero, risulta

$\mathcal{P}(n+1)$ vero. Ora

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (2k+1) &= \sum_{k=1}^n (2k+1) + \underbrace{(2(n+1)+1)}_{\text{ip. induttiva}} = (n+1)^2 + 2n+3 \\ &= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = \\ &= (n+2)^2, \end{aligned}$$

provando che $\mathcal{P}(n+1)$ è vero. Possiamo quindi afferire che $\mathcal{P}(n)$ è vero

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0.$

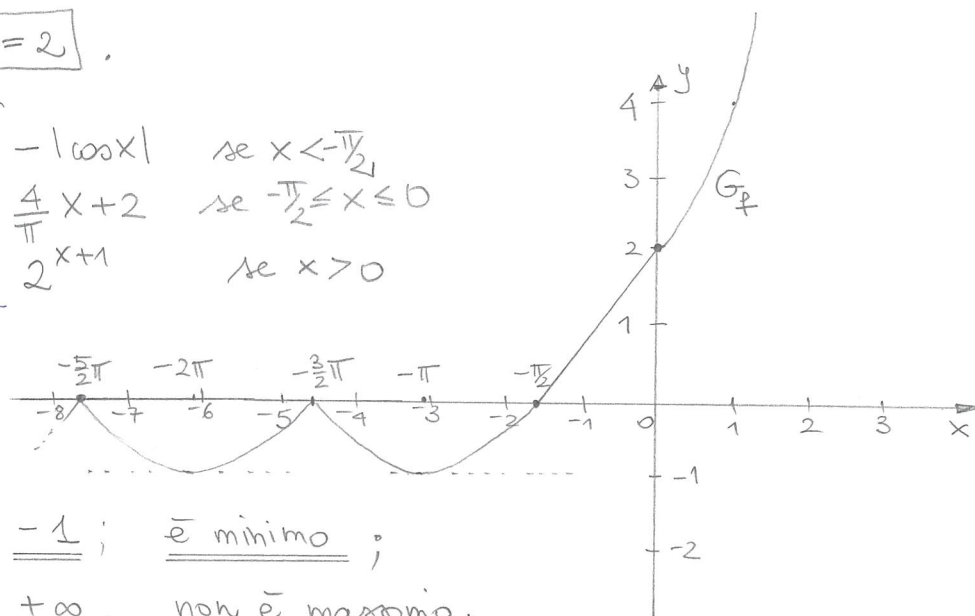
b3) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$$f(x) = \begin{cases} -|\cos x| & \text{se } x < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{4}{\pi}x + a & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \\ 2^{x+1} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Basta verificare che esiste un $a \in \mathbb{R}$ per cui risulta continua f nel pt. $x = -\frac{\pi}{2}$ e nel pt. $x = 0$, ossia che esiste un $a \in \mathbb{R}$ tale che

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} (-|\cos x|) &= f(-\frac{\pi}{2}) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \left(\frac{4}{\pi}x + a \right) \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{4}{\pi}x + a \right) &= f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{x+1} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} -2 + a &= 0 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Risulta $a = 2$.

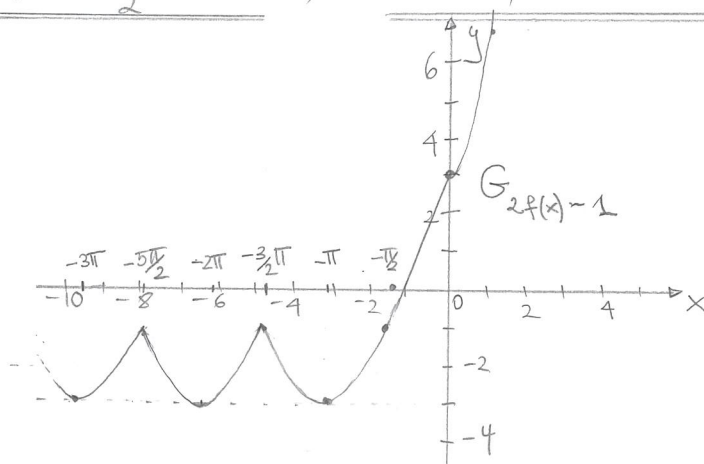
ii) $f(x) = \begin{cases} -|\cos x| & \text{se } x < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{4}{\pi}x + 2 & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \\ 2^{x+1} & \text{se } x > 0 \end{cases}$



a) $\inf_{\mathbb{R}} f = \underline{-1}$; $\bar{e}$ minimo;
 $\sup_{\mathbb{R}} f = \underline{+\infty}$, non $\bar{e}$ massimo.

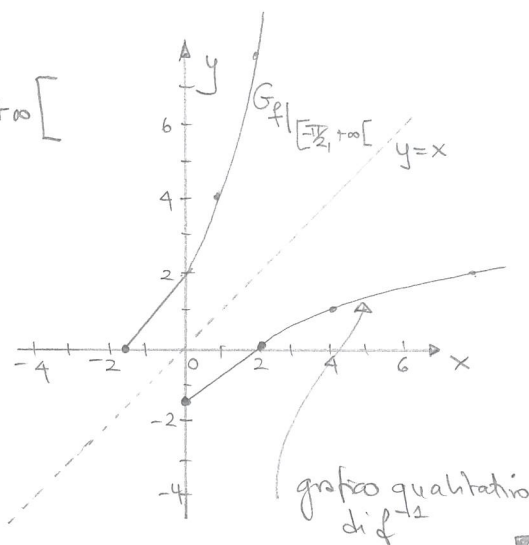
b) $x_k = -\pi - k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 0$ sono pt. di min. loc. stretto;
 $x_k = -\frac{3\pi}{2} - k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 0$ sono pt. di max. loc. stretto.

c)



d) $f: \left[-\frac{\pi}{2}, +\infty\right[\rightarrow [0, +\infty[$

$f^{-1}: [0, +\infty[\rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$



b4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n\beta}(2+\sin n)}{(3^{2n}+1)\log n}$

Notiamo che se $\beta \leq 0$ si ha immediatamente che il limite vale 0.

Infatti, $\beta = 0$ $\frac{(2+\sin n)^{\text{limitato}}}{(3^{2n}+1)\log n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$;

$\beta < 0$ $\frac{(2+\sin n)}{3^{-n\beta}(3^{2n}+1)\log n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Se $\beta > 0$, allora $\frac{3^{n\beta}(2+\sin n)}{(3^{2n}+1)\log n} = \frac{3^{n(\beta-2)}(2+\sin n)}{(1+\frac{1}{3^{2n}})\log n} \begin{cases} \rightarrow 0 & \text{se } \beta \leq 2 \\ +\infty & \text{se } \beta > 2. \end{cases}$

Infatti, se $\beta \leq 2$, si ha $\frac{(2+\sin n)^{\text{limitato}}}{3^{n(2-\beta)}(1+\frac{1}{3^{2n}})\log n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,

e, per $\beta > 2$, $(3^{\beta-2})^n$ è un infinito di ordine superiore all'infinito $\log n$, per $n \rightarrow +\infty$, e $0 < 2+\sin n \leq 3, \forall n$.

Riassumendo, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n\beta}(2+\sin n)}{(3^{2n}+1)\log n} = \begin{cases} 0 & \text{se } \beta \leq 2 \\ +\infty & \text{se } \beta > 2. \end{cases}$

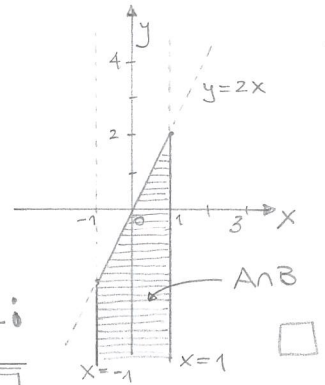
b5) i) $f(x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0 \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$. $\square$

ii) L'implicazione presentata è falsa! Infatti $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ non implica necessariamente che $f(0) > 1000$. $\blacksquare$

b6) $\lambda = \inf A \iff \begin{cases} \text{i) } \forall x \in A, \lambda \leq x \\ \text{ii) } \forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in A : x_\varepsilon < \lambda + \varepsilon. \end{cases}$ $\blacksquare$

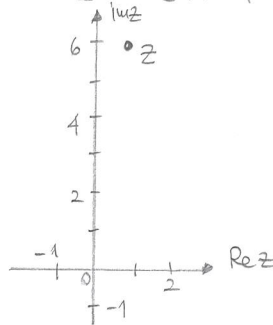
FILA C

21) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 2x\}$



22) $z = 3 - i$ $\frac{1}{\bar{z} - 1} = \frac{1}{3 + i - 1} = \frac{1}{2 + i} \cdot \frac{2 - i}{2 - i} = \frac{2 - i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$

23) $z = 1 + 6i$



$\arg z \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$

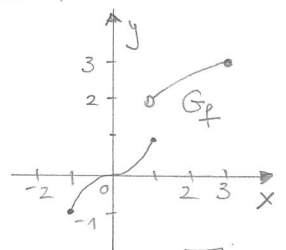
24) $a_n = \arccos\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)$, $n \geq 2$: $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \searrow \arccos x \searrow$ su $[1, 1]$
 $\Rightarrow \arccos\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) \nearrow$

25) $A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{|x| - 1} < 3\}$: $\sqrt{|x| - 1} < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} |x| - 1 \geq 0 \\ |x| - 1 < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \geq 1 \\ |x| < 10 \end{cases}$

$\Rightarrow A =]-10, -1] \cup [1, 10[$. Risultato $\inf(A \cap [0, +\infty[) = 1$
 $\sup(A \cap [0, +\infty[) = 10$

26) $f : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \in [-1, 1] \\ 2 + \log_3 x & \text{se } 1 < x \leq 3 \end{cases}$

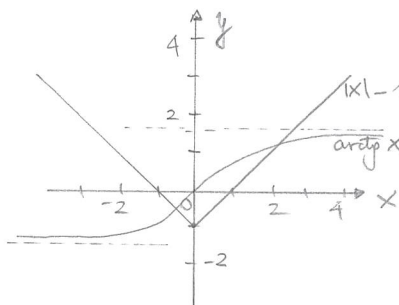
$f([-1, 3]) = [-1, 1] \cup]2, 3]$



27) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 - 6x + 4 = (x - 3)^2 - 5$

$I = [3, +\infty[$

28) $|x| - 1 = \arctan x$



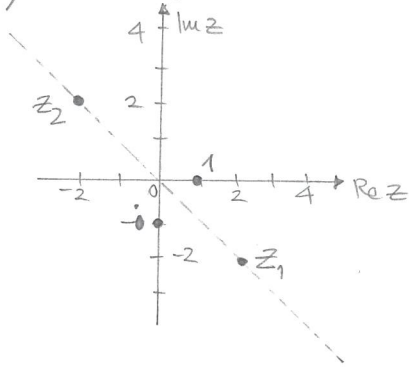
nr. di soluzioni è 2 ;
una soluzione è negativa,
e una è positiva.

29) $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^3 - 1$ $g(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \leq 0 \\ -1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

sì ha $(g \circ f)(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \leq 1 \\ -1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

30) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \frac{-\infty}{\text{infinitesimo negativo}}$

$$b1) i) |z-1| + |z|^2 = |z+i| + 9 \Leftrightarrow \begin{cases} |z-1| = |z+i| \\ |z|^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow |z| = 3$$



Svolgendo analog, a quanto fatto in Es. b1)

Fila (A) o Fila (B) noteremo che le soluzioni del sistema sopra sono

$$\underline{z_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i} \quad \underline{z_2 = -\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}i} \quad \square$$

$$ii) \underline{z_1 = 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 3 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)}$$

$$\underline{z_2 = 3 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 3 \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right)}$$

Infine

$$\underline{z_1^5 = 3^5 \left(\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right) \right) = 81 z_2}$$

$$\underline{z_2^5 = 3^5 \left(\cos\left(\frac{15\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{15\pi}{4}\right) \right) = 81 z_1}$$

$$b2) \text{ Sia } P(n) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)k} = 1 - \frac{1}{n} \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Si ha facilmente che $P(2)$ è vero (infatti, per $n=2$, risulta $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$).

Resta da provare che $\forall n \geq 2$, supposto vero $P(n)$, risulta

$P(n+1)$ vero. Ora

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{(k-1)k} &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)k} + \frac{1}{n(n+1)} \stackrel{\text{ip. induttiva}}{=} 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= 1 - \frac{n+1 - 1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

provando che $P(n+1)$ è vero. Possiamo quindi asserire che $P(n)$ è vero $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. $\square$

$$b3) i) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} |\sin x| & \text{se } x < -\frac{\pi}{2} \\ e^{\frac{2}{\pi}x+a} & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \\ 2x+e & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

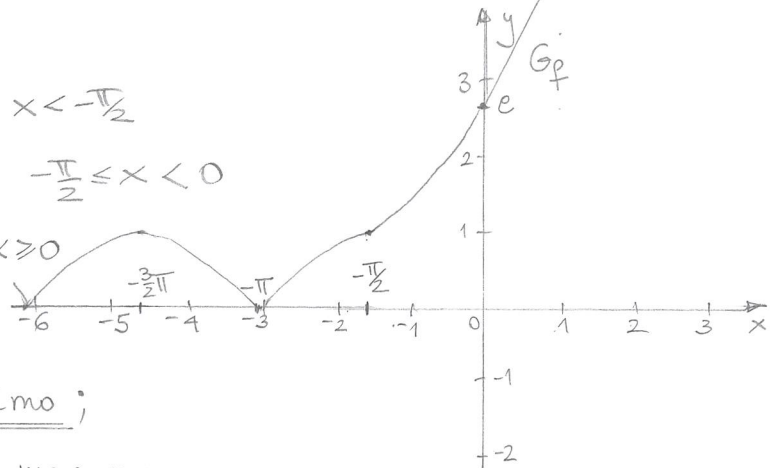
Basta verificare che esiste un $a \in \mathbb{R}$ per cui risulta continua f

nel pt. $x = -\frac{\pi}{2}$ e nel pt. $x = 0$, ossia che esiste un $a \in \mathbb{R}$ tale che

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} |\sin x| &= f(-\frac{\pi}{2}) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} e^{\frac{2}{\pi}x+a} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{2}{\pi}x+a} &= f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x+e) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} 1 &= e^{-1+a} \\ -1+a &= 0 \\ e^a &= e \\ a &= 1 \end{aligned}$$

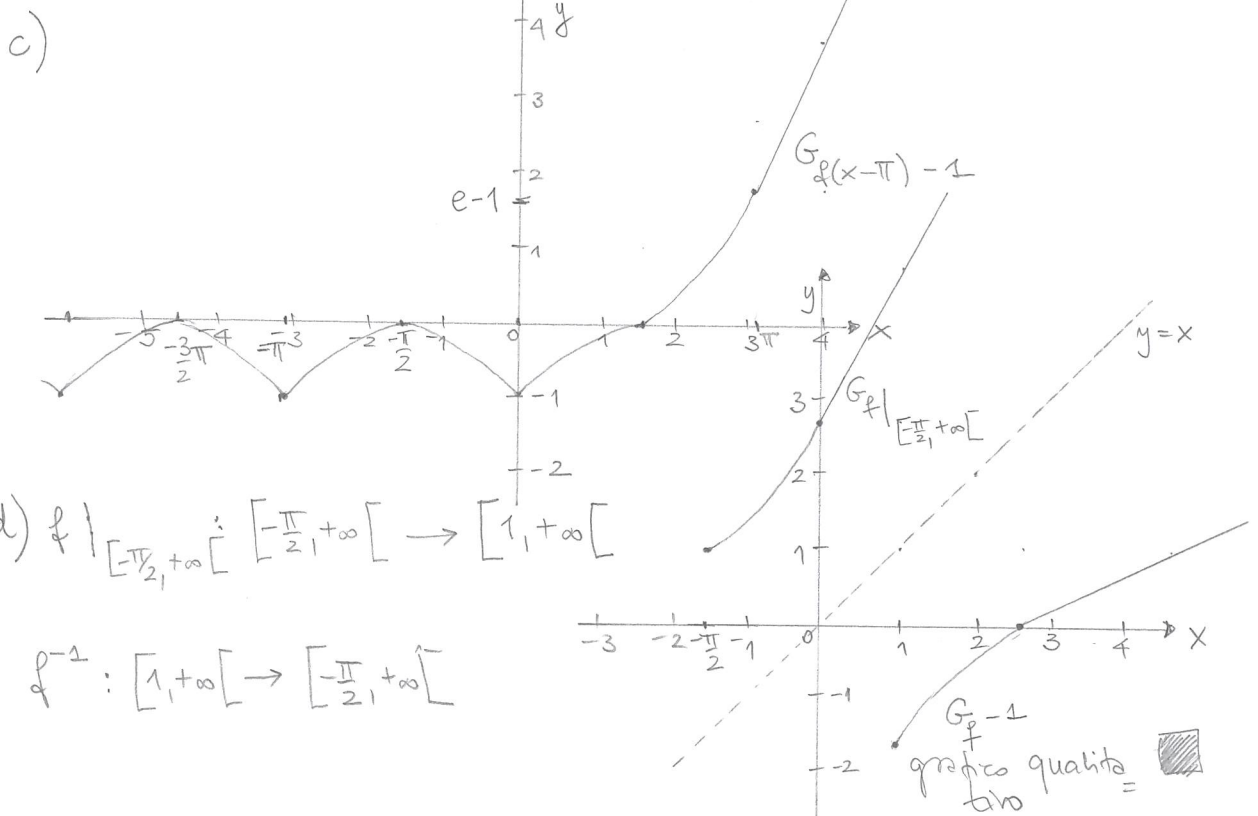
Risultato $\boxed{a=1}$.

$$ii) f(x) = \begin{cases} |\sin x| & \text{se } x < -\frac{\pi}{2} \\ e^{\frac{2}{\pi}x+1} & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \\ 2x+e & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$



a) $\inf_{\mathbb{R}} f = 0$; è minimo;
 $\sup_{\mathbb{R}} f = +\infty$; non è massimo.

b) $x_k = -k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ sono pt. di min. loc. stretto perf.;
 $x_k = -\frac{3}{2}\pi - k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 0$ sono pt. di max. loc. stretto perf.



$$b4) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n \arctan n}{(2^{n\alpha} + 1)n}$$

Notiamo che se $\alpha \leq 0$ si ha immediatamente che il limite vale $+\infty$.

Infatti, $\alpha = 0$ $\frac{2^n \arctan n}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

essendo 2^n un infinito di ordine superiore all'infinito n , per $n \rightarrow +\infty$;

se $\alpha < 0$, allora $\frac{2^n \arctan n}{\left(\frac{1}{2^{-n\alpha}} + 1\right)n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ per lo stesso motivo di cui sopra.

Se $\alpha > 0$, allora

$$\frac{2^n \arctan n}{(2^{n\alpha} + 1)n} = \frac{2^n \arctan n}{2^{n\alpha} \left(1 + \frac{1}{2^{n\alpha}}\right)n} = 2^{n(1-\alpha)} \frac{\arctan n}{\left(1 + \frac{1}{2^{n\alpha}}\right)n}$$

$$\rightarrow 0 \text{ se } 1-\alpha \leq 0$$

$$\rightarrow +\infty \text{ se } 1-\alpha > 0$$

Infatti, se $\alpha \geq 1$, si ha $\frac{\arctan n}{2^{n(\alpha-1)} \left(1 + \frac{1}{2^{n\alpha}}\right)n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, limitato

e per $\alpha < 1$, $\frac{2^{n(1-\alpha)} \arctan n}{\left(1 + \frac{1}{2^{n\alpha}}\right)n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, poiché

$(2^{1-\alpha})^n$ è un infinito di ordine superiore all'infinito n , per $n \rightarrow +\infty$, e $\arctan n \rightarrow \frac{\pi}{2}$ per $n \rightarrow +\infty$.

Riassumendo, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n \arctan n}{(2^{n\alpha} + 1)n} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \geq 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 1. \end{cases}$ ■

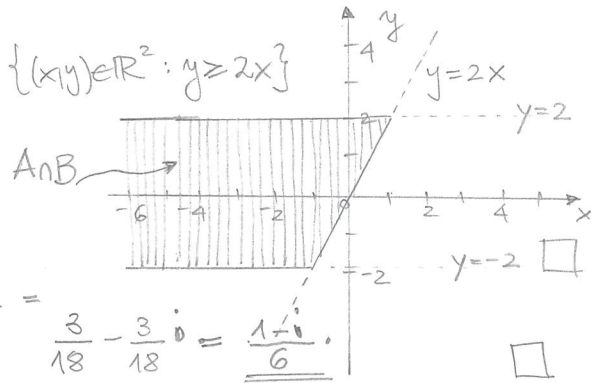
b5) i) $f(x) = o(1)$ per $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$. □

ii) L'implicazione presentata è falsa! Infatti $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$ non implica necessariamente che $f(0) < 4$. ■

b6) $\lambda = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \text{i)} \forall x \in A, x \leq \lambda \\ \text{ii)} \forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in A : \lambda - \varepsilon < x_\varepsilon. \end{cases}$ ■

FILA (D)

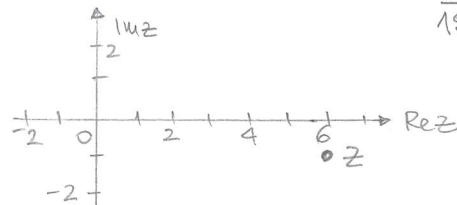
21) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq 2\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 2x\}$



22) $z = 1 - 3i$

$$\frac{1}{\bar{z} + 2} = \frac{1}{1 + 3i + 2} = \frac{1}{3 + 3i} \cdot \frac{3 - 3i}{3 - 3i} = \frac{3 - 3i}{9 - 9i^2} = \frac{3 - 3i}{18} = \frac{1 - i}{6}$$

23) $z = 6 - i$



$\arg z \in]-\frac{\pi}{4}, 0[$. $\square$

24) $a_n = \arctan(1 + \frac{1}{n})$, $n \geq 1$: $1 + \frac{1}{n} \searrow$ $\arctan x \nearrow$ on $\mathbb{R}$
 $\Rightarrow \arctan(1 + \frac{1}{n}) \searrow$. $\square$

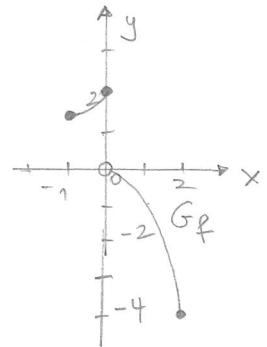
25) $A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{|x| - 1} < 2\}$: $\sqrt{|x| - 1} < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} |x| - 1 \geq 0 \\ |x| - 1 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \geq 1 \\ |x| < 5 \end{cases}$

$\Rightarrow A =]-5, -1] \cup [1, 5[$. Risultato $\inf(A \cap]-\infty, 0]) = -5$

$\sup(A \cap]-\infty, 0]) = -1$. $\square$

26) $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} 2^x + 1 & \text{se } x \in [-1, 0] \\ -x^2 & \text{se } 0 < x \leq 2 \end{cases}$

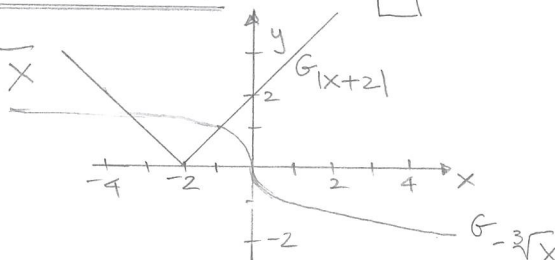
$f([-1, 2]) = [-4, 0[\cup [\frac{3}{2}, 2]$. $\square$



27) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 + 4x + 3 = (x + 2)^2 - 1$

$I =]-\infty, -2]$. $\square$

28) $|x + 2| = -\sqrt[3]{x}$



nr. delle soluz. è 2;

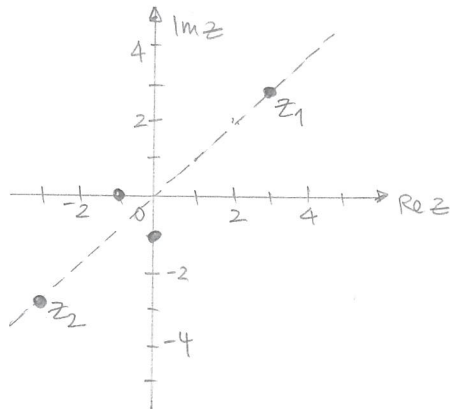
entrambe le soluzioni sono negative. $\square$

29) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = |x| - 1$ $g(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x < 0 \\ 3 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ si ha

$(g \circ f)(x) = \begin{cases} -2 & -1 < x < 1 \\ 3 & \text{se } x \leq -1 \text{ o } x \geq 1 \end{cases}$ $\square$

210) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2}{|x| - 2} = +\infty$.
 (infinitesimo positivo)
 $\square$

$$b1) i) |z|^2 + |z+1| = 16 + |z+i| \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 = 16 \\ |z+1| = |z+i| \end{cases} \Leftrightarrow |z| = 4$$



Svolgendo analog. a quanto fatto in Es. b1) FILA(A) o FILA(B) si ottiene che le soluzioni del sistema sopra sono

$$\underline{z_1 = \frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}}i} \quad \underline{z_2 = -\frac{4}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{2}}i}$$

$$ii) \underline{z_1 = 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 4 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)}$$

$$\underline{z_2 = 4 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 4 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)}$$

Infine

$$\underline{z_1^3 = 4^3 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 64 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 32(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})}$$

$$\underline{z_2^3 = 4^3 \left(\cos \frac{15\pi}{4} + i \sin \frac{15\pi}{4} \right) = 64 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 32(+\sqrt{2} - i\sqrt{2})}$$

b2) Sia $P(n) = \sum_{k=0}^n (4k+1) = (2n+1)(n+1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$.

Si ha immediatamente che $P(0)$ è vero (infatti, per $n=0$, si ha $1=1$).

Resta da provare che $\forall n \geq 0$, supposto vero $P(n)$, risulta

vero $P(n+1)$. Ora:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} (4k+1) &= \sum_{k=0}^n (4k+1) + 4(n+1)+1 = (2n+1)(n+1) + 4(n+1)+1 \\ &\quad \uparrow \text{ip. induttiva} \\ &= 2n^2 + 3n + 1 + 4n + 5 = 2n^2 + 7n + 6 = \\ &= (2n+3)(n+2), \end{aligned}$$

provando che $P(n+1)$ è vero. Possiamo quindi affermare che

$P(n)$ è vero $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0$.

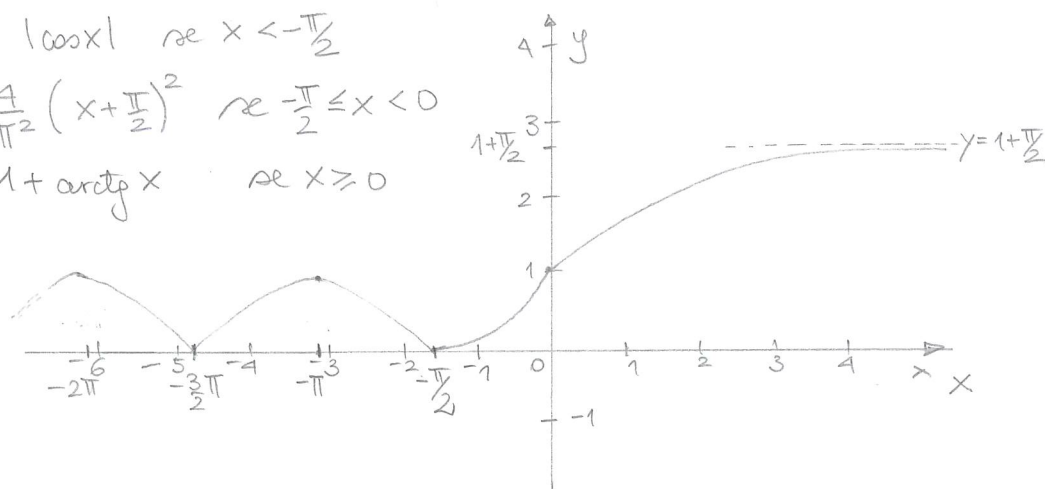
b3) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} |\cos x| & \text{se } x < -\frac{\pi}{2} \\ a(x + \frac{\pi}{2})^2 & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \\ 1 + \arctan x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

Basta verificare che esiste $a \in \mathbb{R}$ per cui risulta continua f nel pt. $x = -\frac{\pi}{2}$ e nel pt. $x = 0$, ossia che esiste un $a \in \mathbb{R}$ tale che

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} |\cos x| &= f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} a\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} a\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2 &= f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \arctan x) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} 0 &= a\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)^2 \quad \forall a \in \mathbb{R} \\ a \frac{\pi^2}{4} &= 1 \quad \Leftrightarrow a = \frac{4}{\pi^2} \end{aligned}$$

Risulta $\boxed{a = \frac{4}{\pi^2}}$.

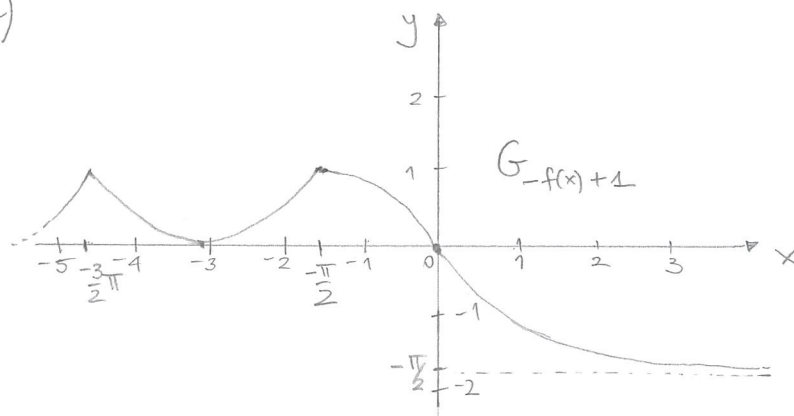
ii) $f(x) = \begin{cases} |\cos x| & \text{se } x < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{4}{\pi^2} \left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2 & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \\ 1 + \arctan x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

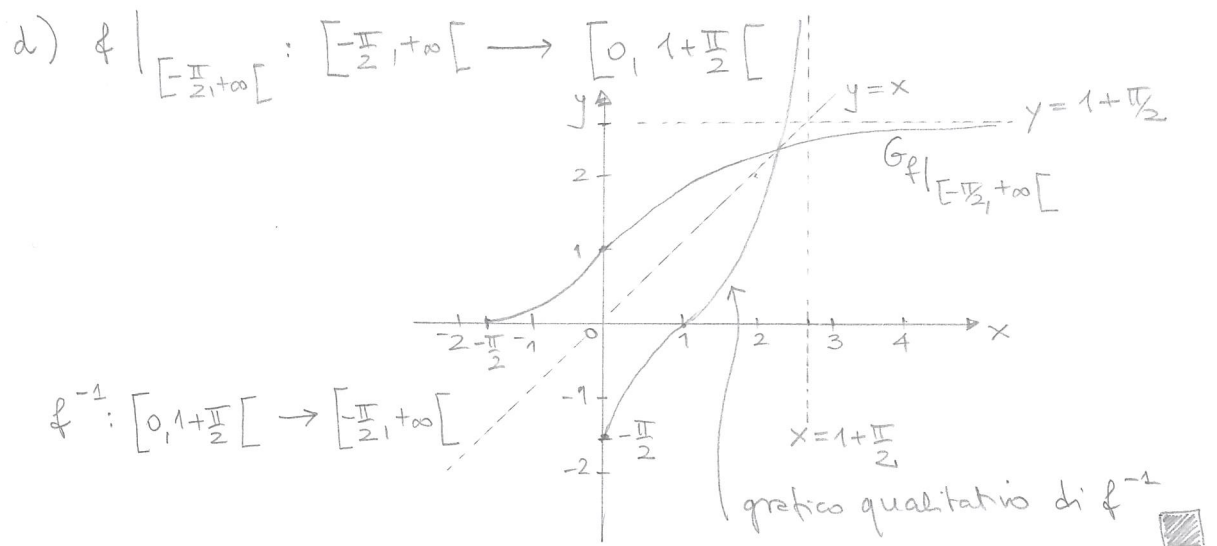


a) $\inf_{\mathbb{R}} f = 0$, è minimo;
 $\sup_{\mathbb{R}} f = 1 + \frac{\pi}{2}$, non è massimo.

b) $\underline{x_k = -\frac{\pi}{2} - k\pi}$, $k \in \mathbb{N}, k \geq 0$ sono pt. di minimo loc. stretto;
 $\underline{x_k = -k\pi}$, $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ sono pt. di massimo locale stretto.

c)





b4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n} (2 + \cos n)}{(3^{n\beta} + 1) \log n}$

Procedendo come nell'esercizio b4) della Fila C) si dimostra che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n} (2 + \cos n)}{(3^{n\beta} + 1) \log n} = \begin{cases} 0 & \text{se } \beta \geq 2 \\ +\infty & \text{se } \beta < 2. \end{cases}$$

b5) i) $f(x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0 \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$. $\square$

ii) L'implicazione presentata è falsa! Infatti $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ non implica necessariamente che $f(0) < -1000$. $\blacksquare$

b6) $\lambda = \inf A \iff \begin{cases} \text{i) } \forall x \in A, \lambda \leq x \\ \text{ii) } \forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in A : x_\varepsilon < \lambda + \varepsilon. \end{cases}$ $\blacksquare$