COGNOME ______________	NON SCRIVERE QUI
NOME ______________	1 2 3 4 5 6
MATRICOLA ⎿⏊⏊⏊⏊⏊⏌	A

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI INGEGNERIA E SCIENZA DELL'INFORMAZIONE

CDL IN INFORMATICA - CDL IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE E DELLE COMUNICAZIONI
CDL IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE E ORGANIZZAZIONE D'IMPRESA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1

A.A. 2016-2017 — TRENTO, 19 GIUGNO 2017

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.
IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA. È OBBLIGATORIO RIPORTARE LE RISPOSTE DEI PRIMI 10 ESERCIZI SUL FOGLIO PRESTAMPATO.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro nel foglio del testo.
Non usate il colore rosso.

a1) Sia $A = \{x_n = \dfrac{\cos n\pi}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$. Determinate $\min A$ e $\max A$, se esistono.

Risposta:

a2) Determinate $Im(\dfrac{1+i}{1-i})$.

Risposta:

a3) Determinate il dominio della funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x-3}$.

Risposta:

a4) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \arctan(|x|)$. Determinate $\inf_{\mathbb{R}} f$ e $\sup_{\mathbb{R}} f$.

Risposta:

a5) Individuate il tipo di monotonia della successione $a_n = \arcsin\left(-\frac{1}{n+1}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Risposta:

a6) Calcolate il limite $\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^{3n}$.

Risposta:

a7) Sia $f : [-2, 3] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Dite quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera:
i) f cambia segno in $[-2, 3]$.
ii) f ha un punto di minimo in $[-2, 3]$.
iii) f ha un punto critico in $[-2, 3]$.

Risposta:

a8) Determinate i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui risulta convergente la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha^2 - 1)^n$.

Risposta:

a9) Determinate la funzione primitiva $F(x)$ della funzione $f(x) = x^3 \log x$ soddisfacente $F(1) = 0$.

Risposta:

a10) Dite se la relazione $e^x - 1 = o(\sqrt{x})$, per $x \to 0^+$, è vera o falsa.

Risposta:

b1) i) Determinate gli $z \in \mathbb{C}$ soddisfacenti il sistema

$$\begin{cases} z^4 = -16 \\ \arg z \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[. \end{cases}$$

ii) Per ogni z soluzione di i), rappresentate graficamente tutti i numeri complessi $w \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases} |w| \geq \dfrac{|z|}{2} \\ \arg w = \arg z + \dfrac{\pi}{4} . \end{cases}$$

---

b2) i) Rappresentate graficamente le funzioni $f, g : [-3,3] \to \mathbb{R}$ definite da

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+2} & \text{se } -3 \leq x < -1 \\ e^{x+1} & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ x + e & \text{se } 0 < x \leq 3 , \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -|x| & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ -1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

ii) Determinate le immagini di f e g.
iii) Rappresentate graficamente la funzione inversa $f^{-1} : f([-3,3]) \to [-3,3]$.
iv) Determinate $(f^{-1})'(2+e)$.
v) Determinate l'espressione di $(f \circ g)(x)$.

---

b3) i) Studiate (dominio, simmetrie, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità, punti critici e loro natura) la funzione

$$f(x) = \sqrt{|x|} - x .$$

e tracciatene un grafico qualitativo.
ii) Tracciate un grafico qualitativo della funzione $g(x) = \arctan f(x)$.
iii) Calcolate, usando la definizione, l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{f(x)}\, dx$.

---

b4) i) Determinate per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta convergente la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}} - 1}{n^\alpha}$.

ii) Determinate l'insieme di convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}} - 1}{n} x^n$.

---

b5) Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{-2x}{x^2+1} y + \dfrac{3e^x}{x^2+1} \\ y(0) = 1 . \end{cases}$$

---

b6) i) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Scrivete la definizione di $\displaystyle\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$.
ii) Scrivete l'enunciato e la dimostrazione della *Formula della derivata del prodotto di due funzioni.*

COGNOME ____________	NON SCRIVERE QUI
NOME ____________	1 2 3 4 5 6
MATRICOLA ⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊	B

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI INGEGNERIA E SCIENZA DELL'INFORMAZIONE

CdL in Informatica - CdL in Ingegneria dell'informazione e delle comunicazioni
CdL in Ingegneria dell'informazione e organizzazione d'impresa

Esame scritto di Analisi Matematica 1

A.A. 2016-2017 — Trento, 19 giugno 2017

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.
IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA. È OBBLIGATORIO RIPORTARE LE RISPOSTE DEI PRIMI 10 ESERCIZI SUL FOGLIO PRESTAMPATO.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro nel foglio del testo.
Non usate il colore rosso.

---

a1) Sia $A = \{x_n = \dfrac{\cos n\pi}{n+1} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$. Determinate $\min A$ e $\max A$, se esistono.

Risposta:

---

a2) Determinate $Im(\dfrac{1-i}{1+i})$.

Risposta:

---

a3) Determinate il dominio della funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x-2}$.

Risposta:

---

a4) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = -\arctan(|x|)$. Determinate $\inf_{\mathbb{R}} f$ e $\sup_{\mathbb{R}} f$.

Risposta:

a5) Individuate il tipo di monotonia della successione $a_n = \arccos\big(1 - \frac{1}{n}\big)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Risposta:

a6) Calcolate il limite $\lim_{n\to+\infty} \big(1 + \dfrac{3}{n}\big)^{2n}$.

Risposta:

a7) Sia $f : [-2,3] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Dite quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera:
i) f ha un punto critico in $[-2,3]$.
ii) f ha segno costante in $[-2,3]$.
iii) f ha un punto di massimo in $[-2,3]$.

Risposta:

a8) Determinate i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui risulta convergente la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \big(|\alpha| - 1\big)^n$.

Risposta:

a9) Determinate la funzione primitiva $F(x)$ della funzione $f(x) = xe^x$ soddisfacente $F(0) = 1$.

Risposta:

a10) Dite se la relazione $\log(1 + x) = o(x)$, per $x \to 0^+$, è vera o falsa.

Risposta:

b1) i) Determinate gli $z \in \mathbb{C}$ soddisfacenti il sistema

$$\begin{cases} z^3 = -8 \\ \arg z \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[. \end{cases}$$

ii) Per ogni z soluzione di i), rappresentate graficamente tutti i numeri complessi $w \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases} |w| \geq \dfrac{|z|}{2} \\ \arg w = \arg z + \pi . \end{cases}$$

---

b2) i) Rappresentate graficamente le funzioni $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ e $g : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ definite da

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ 2^x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x & \text{se } 1 < x \leq 2 , \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

ii) Determinate le immagini di f e g.
iii) Rappresentate graficamente la funzione inversa $f^{-1} : f([-2, 2]) \to [-2, 2]$.
iv) Determinate $(f^{-1})'(3)$.
v) Determinate l'espressione di $(f \circ g)(x)$.

---

b3) i) Studiate (dominio, simmetrie, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità, punti critici e loro natura) la funzione

$$f(x) = \sqrt{|x|} + x .$$

e tracciatene un grafico qualitativo.
ii) Tracciate un grafico qualitativo della funzione $g(x) = \arctan f(x)$.
iii) Calcolate, usando la definizione, l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\, dx$.

---

b4) i) Determinate per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta convergente la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}} - 1}{n^\alpha}$.

ii) Determinate l'insieme di convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}} - 1}{n} x^n$.

---

b5) Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{-2x}{x^2+1} y + \dfrac{3\cos x}{x^2+1} \\ y(0) = 2 . \end{cases}$$

---

b6) i) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Scrivete la definizione di $\displaystyle\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$.

ii) Scrivete l'enunciato e la dimostrazione della *Formula della derivata del prodotto di due funzioni.*
