Cognome ____________________

Nome ____________________

Matricola

Non scrivere qui

1	2	3	4	5	6

A

Università di Trento — Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione

CdL in Informatica - CdL in Ingegneria dell'informazione e delle comunicazioni
CdL in Ingegneria dell'informazione e organizzazione d'impresa

Esame scritto di Analisi Matematica 1

A.A. 2016-2017 — Trento, 16 settembre 2017

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.
IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA. È OBBLIGATORIO RIPORTARE LE RISPOSTE DEI PRIMI 10 ESERCIZI SUL FOGLIO PRESTAMPATO.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro nel foglio del testo.
Non usate il colore rosso.

a1) Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : |x|(x^2 - 2x - 3) < 0\}$. Dite se A è un intervallo.

Risposta:

a2) Sia $A = \{x_n = -\dfrac{1}{\log n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$. Determinate $\inf A$ e $\sup A$.

Risposta:

a3) Rappresentate graficamente nel piano di Gauss l'insieme $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 1\}$.

Risposta:

a4) Sia $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1 - 3\log x$. Determinate l'espressione della funzione inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$.

Risposta:

a5) Calcolate $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^n}{3^{n^2}+n^6}$.

Risposta:

a6) Dite se la retta $x=0$ è un asintoto verticale per la funzione $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x^2}$.

Risposta:

a7) Determinate il valore $a\in\mathbb{R}$ tale che la funzione $f:[-2,1]\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{se } -2\le x\le 0\\ ax+1 & \text{se } 0<x\le 1\end{cases}$$

risulti derivabile in $x=0$.

Risposta:

a8) Determinate per quali valori di $\alpha>0$ risulta convergente la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\arctan\frac{1}{n^{4\alpha}}$.

Risposta:

a9) Calcolate l'area della regione piana $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le \sqrt[4]{x}\}$.

Risposta:

a10) Determinate le soluzioni dell'equazione $y'=\sin^2 x\cos x$.

Risposta:

b1) Determinate le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ della disequazione

$$Re\left(\frac{z+1}{z-i}\right) \leq 1$$

e rappresentatele graficamente nel piano di Gauss.

---

b2) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, sia $f_\alpha(x) = e^{x-\frac{1}{3}x^2} - 1 - x^\alpha$ per $x \in \mathbb{R}$.
Inoltre sia $g(x) = \sqrt[3]{1+x^2} - 1$ per $x \in \mathbb{R}$. Determinate α e $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tali che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f_\alpha(x)}{\beta g(x)} = 1$$

(ossia $f_\alpha(x)$ e $\beta g(x)$ sono asintotici, per $x \to 0^+$).

---

b3) i) Studiate (dominio, simmetrie, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità, punti critici e loro natura) la funzione

$$f(x) = e^{\dfrac{x}{1-|x|}}$$

e tracciatene un grafico qualitativo (lo studio della convessità/concavità è facoltativo).
ii) Rappresentate graficamente la funzione $g(x) = f(|x|)$. Determinate, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $g(x) = k$.

---

b4) i) Sia $g(x) = \dfrac{\log 2x}{x}$ per $x > \dfrac{e}{2}$. Studiate la monotonia di $g(x)$.
ii) Determinate il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\log 2n}{n} x^n$.

---

b5) Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 . \end{cases}$$

---

b6) i) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. La funzione $f(x)$ si dice derivabile in $x = 1$ se . . .
ii) Scrivete l'enunciato e la dimostrazione del *Criterio della radice* n *-esima* per serie a termini non-negativi.

COGNOME ______________________	NON SCRIVERE QUI
NOME ______________________	1 2 3 4 5 6
MATRICOLA ⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋	B

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI INGEGNERIA E SCIENZA DELL'INFORMAZIONE

CDL IN INFORMATICA - CDL IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE E DELLE COMUNICAZIONI
CDL IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE E ORGANIZZAZIONE D'IMPRESA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1

A.A. 2016-2017 — TRENTO, 16 SETTEMBRE 2017

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.
IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA. È OBBLIGATORIO RIPORTARE LE RISPOSTE DEI PRIMI 10 ESERCIZI SUL FOGLIO PRESTAMPATO.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro nel foglio del testo.
Non usate il colore rosso.

a1) Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x - 5 > 0\}$. Dite se A è un intervallo.

Risposta:

a2) Sia $A = \{x_n = \dfrac{1}{\log n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$. Determinate $\inf A$ e $\sup A$.

Risposta:

a3) Rappresentate graficamente nel piano di Gauss l'insieme $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| = 1\}$.

Risposta:

a4) Sia $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1 + 2\log x$. Determinate l'espressione della funzione inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$.

Risposta:

a5) Calcolate $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^{n^2}+n^8}{n^n}$.

Risposta:

---

a6) Dite se la retta $x = 0$ è un asintoto verticale per la funzione $f(x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{x}$.

Risposta:

---

a7) Determinate il valore $a \in \mathbb{R}$ tale che la funzione $f : [-1, 3] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{se } -1 \le x \le 0 \\ ax + 1 & \text{se } 0 < x \le 3 \end{cases}$$

risulti derivabile in $x = 0$.

Risposta:

---

a8) Determinate per quali valori di $\alpha > 0$ risulta convergente la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin \frac{1}{n^{3\alpha}}$.

Risposta:

---

a9) Calcolate l'area della regione piana $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\quad 0 \le y \le \sqrt[3]{x}\}$.

Risposta:

---

a10) Determinate le soluzioni dell'equazione $y' = \sin^3 x \cos x$.

Risposta:

---

b1) Determinate le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ della disequazione

$$Re\left(\frac{z+2}{z+i}\right) \leq 1$$

e rappresentatele graficamente nel piano di Gauss.

---

b2) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, sia $f_\alpha(x) = \log(1 + x + \frac{1}{3}x^2) - x^\alpha$ per x in un intorno di 0. Inoltre sia $g(x) = \sqrt[3]{1+x^2} - 1$ per $x \in \mathbb{R}$. Determinate α e $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tali che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f_\alpha(x)}{\beta g(x)} = 1$$

(ossia $f_\alpha(x)$ e $\beta g(x)$ sono asintotici, per $x \to 0^+$).

---

b3) i) Studiate (dominio, simmetrie, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità, punti critici e loro natura) la funzione

$$f(x) = e^{\frac{x}{|x|-1}}$$

e tracciatene un grafico qualitativo (lo studio della convessità/concavità è facoltativo).
ii) Rappresentate graficamente la funzione $g(x) = f(|x|)$. Determinate, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $g(x) = k$.

---

b4) i) Sia $g(x) = \dfrac{\log 3x}{x}$ per $x > \dfrac{e}{3}$. Studiate la monotonia di $g(x)$.
ii) Determinate il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\log 3n}{n} x^n$.

---

b5) Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^{3x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

---

b6) i) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. La funzione $f(x)$ si dice derivabile in $x = 0$ se ...

ii) Scrivete l'enunciato e la dimostrazione del *Criterio della radice* n *-esima* per serie a termini non-negativi.
