COGNOME ______	NON SCRIVERE QUI
NOME ______	A
MATRICOLA ⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌋	1 2 3 4 5 6

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI INGEGNERIA E SCIENZA DELL'INFORMAZIONE

CDL IN INFORMATICA - CDL IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE E DELLE COMUNICAZIONI
CDL IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE E ORGANIZZAZIONE D'IMPRESA

SECONDA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA 1

A.A. 2016-2017 — TRENTO, 23 DICEMBRE 2016

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.
IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA.
È OBBLIGATORIO RIPORTARE LE RISPOSTE DEI PRIMI 10 ESERCIZI SUL FOGLIO PRESTAMPATO.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti nel foglio del testo.
Non usate il colore rosso.

---

a1) Sia $f:[-1,4]\to\mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{se } -1\le x\le 1\\ \log_{\frac{1}{2}} x & \text{se } 1<x\le 4\,.\end{cases}$

Determinate il minimo e il massimo di f su $[-1,4]$.

Risposta:

---

a2) Calcolate, dove esiste, la derivata (prima) di $f(x)=x^2(\sin(2x)+\log(3+x))$.

Risposta:

---

a3) Scrivete il polinomio di Taylor di ordine 3, centrato in $x_0=0$, della funzione $f(x)=3x-\sin(2x)$.

Risposta:

---

a4) Verificate se la funzione $f(x)=e^{-x^2}+\dfrac{e-1}{e}x$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle in $[0,1]$. (Riportate la verifica sul foglio)

Risposta:

a5) Determinate i punti critici di $F(x) = \int_0^x (e^{t^2} - e)\,dt$ nell'intervallo $[-2, 2]$.

Risposta:

a6) Calcolate il limite $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\cos(3x) - 1}{\sin^2(5x)}$.

Risposta:

a7) Determinate gli $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (2x^2)^n$ risulti convergente.

Risposta:

a8) Determinate la primitiva $F(x)$ di $f(x) = x^2 + \sin(3x)$ soddisfacente $F(0) = 0$.

Risposta:

a9) Dite per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ è convergente l'integrale $\int_0^3 \dfrac{1+x}{x^{2\alpha}}\,dx$.

Risposta:

a10) Trovate l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale $y' = 2y$.

Risposta:

b1) i) Studiate (dominio, simmetrie, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, derivabilità/punti di non derivabilità, punti critici e loro natura) della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{-x^2 + 6|x| - 8}\,.$$

Tracciate un grafico qualitativo della funzione f.
ii) Determinate, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.
iii) Tracciate un grafico qualitativo della funzione $g(x) = \log(f(x))$.

---

b2) i) Determinate il polinomio di Taylor di ordine 3, centrato in $x_0 = 0$, della funzione

$$f(x) = \log(1 - x) + x \cos x + \frac{1}{2} \sin x^2\,.$$

ii) Determinate, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, il seguente limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) + 2x^\alpha}{x^3}\,.$$

---

b3) Determinate l'insieme di convergenza della seguente serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1+3n}{2^n n^2}\Big)(3x+1)^n$.

---

b4) Sia $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione integrale definita da $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{2e^t + 1}\, dt$.
i) Determinate la monotonia di F su $[0,1]$.
ii) Determinate i punti di massimo e di minimo di F su $[0,1]$.
iii) Calcolate $F(1)$.

---

b5) Studiate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \arctan\Big(\frac{1}{x^7}\Big)\, dx\,.$$

---

b6) i) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Il punto x_0 è un *punto di minimo locale (o relativo)* per f se ...

ii) Scrivete l'enunciato e la dimostrazione del *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.*

Cognome ______ Nome ______ Matricola ⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌋	Non scrivere qui 1 2 3 4 5 6 B

Università di Trento — Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione

CdL in Informatica - CdL in Ingegneria dell'informazione e delle comunicazioni
CdL in Ingegneria dell'informazione e organizzazione d'impresa

Seconda prova intermedia di Analisi Matematica 1

A.A. 2016-2017 — Trento, 23 Dicembre 2016

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.
IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA.
È OBBLIGATORIO RIPORTARE LE RISPOSTE DEI PRIMI 10 ESERCIZI SUL FOGLIO PRESTAMPATO.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti nel foglio del testo.
Non usate il colore rosso.

---

a1) Sia $f : [-1,3] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} -x^2+1 & \text{se } -1 \le x \le 1 \\ \log_{\frac{1}{3}} x & \text{se } 1 < x \le 3\,. \end{cases}$

Determinate il minimo e il massimo di f su $[-1,3]$.

Risposta:

---

a2) Calcolate, dove esiste, la derivata (prima) di $f(x) = (x^2 - \log(4+x))\cos(3x)$.

Risposta:

---

a3) Scrivete il polinomio di Taylor di ordine 3, centrato in $x_0 = 0$, della funzione $f(x) = 3x + \log(1+2x)$.

Risposta:

---

a4) Verificate se la funzione $f(x) = e^{-x^2} - \dfrac{e+1}{e}x$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle in $[0,1]$. (Riportate la verifica sul foglio)

Risposta:

a5) Determinate i punti critici di $F(x) = \int_0^x (e^{t^2} - e^2)\, dt$ nell'intervallo $[-2, 2]$.

Risposta:

a6) Calcolate il limite $\lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos(2x)}{\sin(3x^2)}$.

Risposta:

a7) Determinate gli $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (2x^3)^n$ risulti convergente.

Risposta:

a8) Determinate la primitiva $F(x)$ di $f(x) = \frac{3x}{1 + x^2} + \sqrt[3]{x}$ soddisfacente $F(0) = 2$.

Risposta:

a9) Dite per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ è convergente l'integrale $\int_0^2 \frac{1 + x^2}{x^{\alpha - 1}}\, dx$.

Risposta:

a10) Trovate l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale $y' = -3y$.

Risposta:

b1) i) Studiate (dominio, simmetrie, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, derivabilità/punti di non derivabilità, punti critici e loro natura) della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 6|x| + 8}\,.$$

Tracciate un grafico qualitativo della funzione f.

ii) Determinate, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

iii) Tracciate un grafico qualitativo della funzione $g(x) = e^{f(x)}$.

---

b2) i) Determinate il polinomio di Taylor di ordine 3, centrato in $x_0 = 0$, della funzione

$$f(x) = e^{-x} - \cos x^2 + \log(1 + x)\,.$$

ii) Determinate al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, il seguente limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - 2x^\beta}{x^3}\,.$$

---

b3) Determinate l'insieme di convergenza della seguente serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1 + 4n}{3^n n^2}\Big)(2x - 1)^n\,.$

---

b4) Sia $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la funzione integrale definita da $\displaystyle F(x) = \int_0^x \frac{-e^t}{3e^t + 1}\, dt\,.$

i) Determinate la monotonia di F su $[0, 1]$.

ii) Determinate i punti di minimo e di massimo di F su $[0, 1]$.

iii) Calcolate $F(1)$.

---

b5) Studiate al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \arctan\Big(\frac{1}{x^\beta}\Big)\, dx\,.$$

---

b6) i) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Il punto x_0 è un *punto di massimo locale (o relativo)* per f se ...

ii) Scrivete l'enunciato e la dimostrazione del *Teorema di Torricelli-Barrow.*
