Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze MM.FF.NN
Corso di Laurea in Matematica
Corso di Calcolo delle Variazioni - a.a. 2015/16

ESERCIZI per inaugurare la primavera

Esercizio 1:
A) Per ciascuno dei seguenti funzionali definiti su $\mathcal{C}^1([0,3])$

a) $F(u) = \displaystyle\int_0^3 u'^2\,dx$

b) $F(u) = \displaystyle\int_0^3 [u'^2 + u^2]\,dx$

c) $F(u) = \displaystyle\int_0^3 [u'^2 - 6u]\,dx$

i) determinate tutti i possibili estremali di F,
ii) determinate l'estremale di F che appartiene a $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,3]) : u(0) = 2, u(3) = 6\}$;
iii) verificate che è l'unica funzione minimizzante per F su X e determinate il valore minimo.

B) Studiate il problema di minimo per $F(u)$ in A) nei casi di vincoli $\widetilde{X}_1 = \{u \in \mathcal{C}^1([0,3]) : u(0) = 2\}$, o $\widetilde{X}_2 = \{u \in \mathcal{C}^1([0,3])\}$, oppure $\widetilde{X}_3 = \{u \in \mathcal{C}^1([0,3]) : u(0) = u(3)\}$. Stabilite se il problema di minimo ha una soluzione o no. Se il minimo esiste, determinate il numero di minimizzanti.

Esercizio 2:
Per ciascuno dei seguenti funzionali e insiemi di funzioni ammissibili relativi

a) $F(u) = \displaystyle\int_1^2 [u'(1 + x^4 u')]\,dx \qquad X = \{u \in \mathcal{C}^1([1,2]) : u(1) = 3, u(2) = 6\}$;

b) $F(u) = \displaystyle\int_0^1 [u'^2 + 4u^2 + ue^x]\,dx \qquad X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$;

c) $F(u) = \displaystyle\int_1^2 [x^2 u'^2 + u(1 + 3x^3)]\,dx \qquad X = \{u \in \mathcal{C}^1([1,2]) : u(1) = u(2) = 0\}$

i) determinate tutti i possibili estremali di F,
ii) determinate l'estremale di F che appartiene a X;
iii) verificate che è l'unica funzione minimizzante per F su X.

Esercizio 3: Sia $F(u) = \displaystyle\int_0^1 e^{-u'^2(x)}\,dx$ e sia $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$.

i) Provate che $u_0 \equiv 0$ è un estremale di F.
ii) Provate che u_0 è punto di massimo di F in X.
iii) Per ogni $\varepsilon > 0$ sia $u_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon}(x - \dfrac{1}{2})^2 - \dfrac{1}{4\epsilon}$. Provate che $u_\varepsilon \in X$ e che $\lim_{\varepsilon \to 0} F(u_\varepsilon) = 0$ provando che $\inf_{u \in X} F(u) = 0$. Può esistere il minimo di F su X?