Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze MM.FF.NN - Corso di Laurea in Matematica
Corso di Calcolo delle Variazioni - a.a. 2013/14
docente: Prof. Anneliese Defranceschi

ESERCIZI VARI (per coloro che si divertono a mettere le mani in pasta)

Esercizio 1:
Sia $X = \mathcal{C}^1([a,b])$. Determinate la variazione prima $\delta F(u,v)$ per $u, v \in X$ se

a) $F(u) = \displaystyle\int_a^b \sqrt{2 + x^2 - \sin u'(x)}\, dx$;

b) $F(u) = \displaystyle\int_a^b [x^2 u^2(x) + e^{u'(x)}]\, dx$.

Esercizio 2:
Sia $X = \mathcal{C}^0([a,b])$ e sia $F(u) = \displaystyle\int_a^b [\sin^3 x + u^2(x)]\, dx$ definito su X . Provate che

$$F(u+v) \geq F(u) + \delta F(u,v) \qquad \forall u, v \in X$$

con l'uguaglianza se e solo se $v = 0$.

Esercizio 3:
Sia $h \in \mathcal{C}^0([a,b])$ tale che

$$\int_a^b h(x)u(x)\, dx = 0 \qquad \forall u \in X_0 = \{u \in \mathcal{C}^0([a,b]) : \int_a^b u(x)\, dx = 0\} .$$

Provate che $h(x) = c$ (costante) su $[a,b]$ (Sugg.: applicate opportunamente il lemma di Du Bois-Reymond).

Esercizio 4:
a) Date $\rho, \beta \in X = \mathcal{C}^0([0,b])$ con $\rho > 0$, trovate una funzione $u_0 \in X$ che minimizzi la funzione

$$F(u) = \int_0^b [\rho(x)u^2(x) + \beta(x)u(x)]\, dx \qquad \text{su } X .$$

b) Provate che u_0 è unica.
c) Provate che $\displaystyle\inf_{u \in X} F(u) = -\infty$ se $\rho < 0$.

Esercizio 5:
Per ciascuno dei seguenti problemi, verificate che il funzionale è strettamente convessa su X e determinate l'unica funzione minimizzante per F su X:

a) $F(u) = \displaystyle\int_0^1 [2e^x u(x) + u'(x)^2]\, dx \qquad X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 1\}$;

b) $F(u) = \displaystyle\int_1^2 [2u^2(x) + x^2 u'(x)^2]\, dx \qquad X = \{u \in \mathcal{C}^1([1,2]) : u(1) = 1, u(2) = 5\}$ (Sugg. : L'equazione differenziale ha due soluzioni linearmente indipendenti della forma x^p, $p \in \mathbb{R}$);

c) $F(u) = \displaystyle\int_0^{1/2} [u(x) + \sqrt{1 + u'(x)^2}]\, dx \qquad X = \{u \in \mathcal{C}^1([0, \tfrac{1}{2}]) : u(0) = -1, u(\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\}$;

d) $F(u) = \displaystyle\int_1^8 [u'(x)^2 - 4u(x)]\, dx \qquad X = \{u \in \mathcal{C}^1([1,8]) : u(1) = 2, u(8) = -\tfrac{37}{4}\}$.

e) $F(u) = \displaystyle\int_1^8 [u'(x)^4 - 4u(x)]\, dx \qquad X = \{u \in \mathcal{C}^1([1,8]) : u(1) = 2, u(8) = -\tfrac{37}{4}\}$.

Esercizio 6:

a) Provate che per ogni $x \in [1,2]$ fissato, la funzione $(u.\xi) \mapsto f(x,u,\xi) = x\xi + u$ è convessa, ma non strettamente convessa su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

b) Trovate più di una funzione che minimizzi il funzionale

$$F(u) = \int_1^2 [xu'(x) + u(x)]\,dx \qquad \text{su } X = \{u \in \mathcal{C}^1([1,2]) : u(1) = 1, u(2) = 2\}?$$

Esercizio 7:

Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange determinate l'eventuale funzione minimizzante per F su X_G:

a) $F(u) = \displaystyle\int_0^1 u'(x)^2\,dx \qquad X_G = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 1, G(u) = \int_0^1 xu'(x)\,dx = 1\}$;

b) $F(u) = \displaystyle\int_0^K u^2(x)\,dx \qquad X_G = \{u \in \mathcal{C}^1([0,K]) : u \geq 0, G(u) = \int_0^K (K-x)u(x)\,dx = m\}$, dove K e m sono costanti positive assegnate.

Esercizio 8:

Sia $F(u) = \displaystyle\int_0^b \sqrt{\cos^2 u(x) + u'(x)^2}\,dx$ e sia $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,b]) : u(0) = 0, u(b) = 0\}$ con $b > 0$ assegnata.

a) Provate che $u_0(x) \equiv 0$ su $[0,b]$
   i) è un estremale di F su X;
   ii) soddisfa la condizione necessaria di Legendre stretta per minimizzanti relativi deboli di F su X.

b) Scrivete l'integrale accessorio $Q(v)$ rispetto ad f e u_0 (i.e. $2Q(v) = \delta^2 F(0,v)$ per ogni $v \in X$). Determinate l'equazione (accessoria) di Jacobi e la funzione di Jacobi $\Delta(x,0)$.

c) Usando la teoria dei campi di Jacobi (punti coniugati) discutete la natura dell'estremale u_0 su $[0,b]$ se $b < \pi$ oppure se $b > \pi$.

Esercizio 9:

Sia $F(u) = \displaystyle\int_0^2 [u'(x)^2 - u^2(x)u'(x)^4]\,dx$ e sia $X^a = \{u \in \mathcal{C}^1([0,2]) : u(0) = u(2) = a\}$ con $a \in \mathbb{R}$.

a) Verificate che per ogni $a \in \mathbb{R}$ la funzione costante $u_a(x) \equiv a$ è un estremale per F su X^a.

b) Discutete per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione u_a soddisfa la condizione necessaria di Weierstrass per minimizzanti relativi forti per F su X^a.

c) Discutete per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione u_a soddisfa la condizione necessaria di Legendre per minimizzanti relativi deboli per F su X^a.

Esercizio 10:

Usando la teoria dei campi di Weierstrass provate che $u_0(x) = kx$ minimizza $F(u) = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + u'(x)^2}\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = k\}$ con $k \in \mathbb{R}$. Quale problema state risolvendo?

Esercizio 11:

a) Usando la teoria dei campi di Weierstrass provate che $u_0(x) \equiv 0$ è un minimizzante assoluto (stretto) per il funzionale $F(u) = \displaystyle\int_0^b [u'(x)^2 + 2u(x)u'(x) - 16u^2(x)]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,b]) : u(0) = 0, u(b) = 0\}$ se $0 < b < \frac{\pi}{4}$.

b) Provate che F non ammette minimo su X se $b > \frac{\pi}{4}$.