

Esercizio 1.

A) a) $F(u) = \int_0^3 u'^2 dx$ $f(x, u, \xi) = f(\xi) = \xi^2$ strettamente convessa su $\mathbb{R}$

i) $\frac{d}{dx} [2u'] = 0 \Leftrightarrow u'' = 0$ su $[0, 3]$
 $\Rightarrow \underline{u(x) = c_1 x + c_2} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

ii) $u \in X \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = u(0) = c_2 \\ 6 = u(3) = c_1 \cdot 3 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 2 \\ 3c_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 4/3 \\ c_2 = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \underline{u_0(x) = \frac{4}{3}x + 2}$ è l'unico estremo di F in $X = \{u \in C^1([0, 3]) : u(0) = 2, u(3) = 6\}$

iii) • Essendo f strettamente convessa su $\mathbb{R}$, possiamo asserire che u_0 è l'unica funzione minimizzante per F su X .

•• Possiamo provare anche direttamente questo fatto; infatti:

$\forall u \in X$ si ha $u = u_0 + (u - u_0)$; ne segue

$$F(u) = \int_0^3 (u_0' + (u' - u_0'))^2 dx = \int_0^3 u_0'^2 dx + 2 \int_0^3 u_0' (u' - u_0') dx + \int_0^3 (u' - u_0')^2 dx$$

$$= F(u_0) + \int_0^3 (u' - u_0')^2 dx$$

$\int_0^3 u_0' (u' - u_0') dx = 0$ poiché $u - u_0 \in \{v \in C^1([0, 3]) : v(0) = v(3) = 0\}$ e u_0 è un estremo di F .

$\geq F(u_0) \quad \text{con} \quad \Leftrightarrow u' - u_0' = 0 \text{ su } [0, 3]$

$\Leftrightarrow u = u_0 \text{ su } [0, 3] \quad (\text{poiché } u, u_0 \in X)$

$F(u_0) = \int_0^3 u_0'^2 dx = \int_0^3 \left(\frac{4}{3}\right)^2 dx = \frac{16}{9} \cdot 3 = \underline{\underline{\frac{16}{3}}}$ □

b) $F(u) = \int_0^3 (u'^2 + u^2) dx$

$f(x, u, \xi) = \xi^2 + u^2$ strettamente convessa in (u, ξ) su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

i) $\frac{d}{dx} [2u'] = 2u \Leftrightarrow u'' = u \text{ su } [0, 3]$

$\Rightarrow \underline{u(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

ii) $u \in X \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = u(0) = c_1 + c_2 \\ 6 = u(3) = c_1 e^{-3} + c_2 e^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 - c_2 \\ 6 = (2 - c_2) e^{-3} + c_2 e^3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 - c_2 \\ 6 - 2e^{-3} = c_2(e^3 - e^{-3}) \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} c_2 &= \frac{6 - 2e^{-3}}{e^3 - e^{-3}} \\ c_1 &= 2 - \frac{6 - 2e^{-3}}{e^3 - e^{-3}} = \frac{2e^3 - 6}{e^3 - e^{-3}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u_0(x) = \frac{2e^3 - 6}{e^3 - e^{-3}} e^{-x} + \frac{6 - 2e^{-3}}{e^3 - e^{-3}} e^x \text{ è l'unico estremo di } F$$

$$\text{in } X = \{u \in C^1([0,3]) : u(0)=2, u(3)=6\}.$$

iii) Essendo f strettamente convessa in (u, ξ) , possiamo assicurare che u_0 è l'unica funzione minimizzante per F in X .

•• Possiamo provare anche direttamente questo fatto; infatti $\forall u \in X$ si

$$\text{ha } u = u_0 + (u - u_0); \text{ ne segue}$$

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_0^3 \left[(u'_0 + (u' - u'_0))^2 + (u_0 + (u - u_0))^2 \right] dx = \\ &= \int_0^3 (u_0'^2 + u_0^2) dx + 2 \int_0^3 [u'_0 \cdot (u' - u'_0) + u_0 (u - u_0)] dx + \\ &\quad + \int_0^3 [(u' - u'_0)^2 + (u - u_0)^2] dx \end{aligned}$$

$= 0$, poiché $u - u_0 \in \{v \in C^1([0,3]) : v(0)=v(3)=0\}$ e u_0 è un estremo di F .

$$\begin{aligned} &= F(u_0) + \int_0^3 [(u' - u'_0)^2 + (u - u_0)^2] dx \\ &\geq F(u_0) \quad \Leftrightarrow \begin{aligned} u' - u'_0 &= 0 \\ u - u_0 &= 0 \end{aligned} \text{ in } [0,3] \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow u = u_0 \text{ in } [0,3].$$

$$\begin{aligned} F(u_0) &= \int_0^3 \left[\left(\frac{2e^3 - 6}{e^3 - e^{-3}} e^{-x} + \frac{6 - 2e^{-3}}{e^3 - e^{-3}} e^x \right)^2 + \left(\frac{2e^3 - 6}{e^3 - e^{-3}} e^{-x} + \frac{6 - 2e^{-3}}{e^3 - e^{-3}} e^x \right)^2 \right] dx \\ &= \int_0^3 \left[2 \left(\frac{2e^3 - 6}{e^3 - e^{-3}} \right)^2 e^{-2x} + 2 \left(\frac{6 - 2e^{-3}}{e^3 - e^{-3}} \right)^2 e^{2x} \right] dx \\ &= \left[- \left(\frac{2e^3 - 6}{e^3 - e^{-3}} \right)^2 e^{-2x} + \left(\frac{6 - 2e^{-3}}{e^3 - e^{-3}} \right)^2 e^{2x} \right]_0^3 = \\ &= \left[- \left(\frac{2e^3 - 6}{e^3 - e^{-3}} \right)^2 e^{-6} + \left(\frac{6 - 2e^{-3}}{e^3 - e^{-3}} \right)^2 e^6 + \left(\frac{2e^3 - 6}{e^3 - e^{-3}} \right)^2 - \left(\frac{6 - 2e^{-3}}{e^3 - e^{-3}} \right)^2 \right] \\ &= \left(\frac{2 - 6e^3}{e^6 - 1} \right) \left(1 - \frac{1}{e^6} \right) + \left(\frac{6e^3 - 2}{e^6 - 1} \right) (e^6 - 1) = \frac{(2 - 6e^3)^2}{(e^6 - 1)e^6} + \frac{(6e^3 - 2)^2}{e^6 - 1} \\ &= \frac{(2 - 6e^3)^2}{e^6 - 1} \cdot \frac{(e^6 + 1)}{e^6}. \quad \square \end{aligned}$$

c) $F(u) = \int_0^3 (u'^2 - 6u) dx$ $f(x, u, \xi) = \xi^2 - 6u$ strettamente convessa in ξ
convessa in u .

i) $\frac{d}{dx} [2u'] = -6 \Leftrightarrow 2u'' = -6 \text{ in } [0, 3]$

$\Leftrightarrow u'(x) = -3x + c_1$

$\Leftrightarrow u(x) = -\frac{3}{2}x^2 + c_1x + c_2 \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

ii) $u \in X \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = u(0) = c_2 \\ 6 = u(3) = -\frac{27}{2} + 3c_1 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 2 \\ 4 + \frac{27}{2} = 3c_1 \end{cases}$
 $\Rightarrow \begin{cases} c_2 = 2 \\ c_1 = \frac{35}{6} \end{cases}$

$\Rightarrow u_0(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{35}{6}x + 2$ è l'unico estremo di F in $X = \{u \in C^1([0, 3]) : u(0) = 2, u(3) = 6\}$.

iii) • Essendo f strettamente convessa in ξ e convessa in u , possiamo asserire che u_0 è l'unica funzione minimizzante per F in X (oppure si procede esattamente come nel caso a) e b)).

$$F(u_0) = \int_0^3 \left[(-3x + \frac{35}{6})^2 - 6(-\frac{3}{2}x^2 + \frac{35}{6}x + 2) \right] dx$$
$$= \int_0^3 \left[9x^2 - 35x + \frac{35^2}{36} + 9x^2 - 35x - 12 \right] dx$$
$$= \left[\frac{18x^3}{3} - 35x^2 + \left(\frac{35^2}{36} - 12 \right) x \right]_0^3 = 18 \cdot 9 - 35 \cdot 9 + \left(\frac{35^2}{36} - 12 \right) \cdot 3$$
$$= -17 \cdot 9 + \frac{35^2}{12} - 36 = \frac{35^2}{12} - 189 = \underline{\underline{-70}}.$$

B) $\boxed{F(u) = \int_0^3 u'^2 dx}$, $\tilde{X}_1 = \{u \in C^1([0, 3]) : u(0) = 2\}$.

Procedendo come a lemma, un pt. di minimo $u \in C^2([0, 3])$ di F in $\tilde{X}_1$

deve soddisfare $\begin{cases} u'' = 0 & \text{in } [0, 3] \\ u(0) = 2 \\ u'(3) = 0 \end{cases}$

Abbiamo quindi $u(x) = c_1x + c_2$ in $[0, 3]$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ come soluzione dell'eq. diff. in $[0, 3]$. Imponendo $u(0) = 2$ e $u'(3) = 0$ si ottiene come unica soluzione del sistema dato $u_0(x) \equiv 2$ in $[0, 3]$.

Notiamo che $u_0(x) \equiv 2$ in $[0, 3]$ è pt. di minimo ed è unico : infatti

$\forall u \in \tilde{X}_1$ si ha $u = u_0 + \underbrace{(u - u_0)}_{\substack{\in \tilde{Z}_1 \\ \text{ne segue} \\ \tilde{Z}_1 = \{v \in \mathcal{C}^1([0,3]) : v(0)=0\}}}$

$$F(u) = \int_0^3 (u_0' + (u' - u_0'))^2 dx = \int_0^3 u_0'^2 dx + 2 \underbrace{\int_0^3 u_0' (u' - u_0') dx}_0 + \int_0^3 (u' - u_0')^2 dx$$

$u - u_0 \in \tilde{Z}_1$ e u_0 soddisfa l'eq. di Eulero-Lagrange debole $\int_0^3 u_0' v' dx = 0 \quad \forall v \in \tilde{Z}_1$

$$= F(u_0) + \int_0^3 (u' - u_0')^2 dx \geq F(u_0) \quad \text{con} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} u' - u_0' &= 0 \\ \Leftrightarrow u(x) &= u_0(x) + c \\ \Leftrightarrow u(x) &= u_0(x) \quad \forall x \in [0,3] \end{aligned}$$

poiché da $u, u_0 \in \tilde{X}_1$ segue $c=0$.

• $F(u) = \int_0^3 u'^2 dx, \quad \tilde{X}_2 = \{u \in \mathcal{C}^1([0,3])\}.$

Procedendo come a lezione, un pt. di minimo $u \in \mathcal{C}^2([0,3])$ di F in $\tilde{X}_2$ deve soddisfare

$$\begin{cases} u'' = 0 & \text{in } [0,3] \\ u'(0) = 0 \\ u'(3) = 0 \end{cases}$$

Si ottiene come soluzioni del sistema dato tutte le funzioni $u_0(x) \equiv c$ in $[0,3]$ al variare di $c \in \mathbb{R}$. Procedendo come sopra si ha che $F(u) \geq F(u_0) \quad \forall u \in \tilde{X}_2$. Ovviamente i pt. di minimo sono infiniti.

• $F(u) = \int_0^3 u'^2 dx, \quad \tilde{X}_3 = \{u \in \mathcal{C}^1([0,3]) : u(0) = u(3)\}.$

Procedendo come a lezione, un pt. di minimo $u \in \mathcal{C}^2([0,3])$ di F in $\tilde{X}_3$ deve soddisfare

$$\begin{cases} u'' = 0 & \text{in } [0,3] \\ u(0) = u(3) \\ u'(0) = u'(3) \end{cases}$$

Si ottiene come soluzioni del sistema dato le funzioni $u_0(x) \equiv c$ in $[0,3]$, al variare di $c \in \mathbb{R}$. Procedendo come sopra si ha che $F(u) \geq F(u_0) \quad \forall u \in \tilde{X}_3$. Ovviamente le funzioni minimizzanti sono infinite. $\square$

b) $F(u) = \int_0^3 (u'^2 + u^2) dx, \quad \tilde{X}_1 = \{u \in \mathcal{C}^1([0,3]) : u(0) = 2\}.$

Procedendo come a lezione, un pt. di minimo $u \in \mathcal{C}^2([0,3])$ di F in $\tilde{X}_1$ deve soddisfare

$$\begin{cases} u'' = u & \text{in } [0,3] \\ u(0) = 2 \\ u'(3) = 0. \end{cases}$$

le soluzioni dell'eq. diff. data sono le funzioni $u(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x$ in $[0,3]$,

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Impoendo $u(0) = 2$ e $u'(3) = 0$ si ottiene

$$\text{come unica soluzione del sistema dato } \underline{u_0(x) = \frac{2e^6}{1+e^6} e^{-x} + \frac{2}{1+e^6} e^x \text{ in } [0,3].}$$

Procedendo come in A) b) iii) si ha che $\forall u \in \tilde{X}_1$

$$F(u) \geq F(u_0) + \int_0^3 [(u' - u_0')^2 + (u - u_0)^2] dx \geq F(u_0) \quad \text{con } \begin{cases} u' - u_0' = 0 \\ u - u_0 = 0 \end{cases}$$

Quindi possiamo concludere che u_0 è funzione minimizzante di F in $\tilde{X}_1$ ed è unico.

Orizionalmente a tale conclusione si poteva giungere anche grazie

alla (stretta) convexit  di f in (u, ξ) .

$$\bullet F(u) = \int_0^3 (u'^2 + u^2) dx, \quad \tilde{X}_2 = \{u \in \mathcal{C}^1([0,3])\}.$$

Procedendo come a lezione, un pt. di minimo $u \in \mathcal{C}^2([0,3])$ di F in

$$\tilde{X}_2 \text{ deve soddisfare } \begin{cases} u'' = u & \text{in } [0,3] \\ u'(0) = 0 \\ u'(3) = 0. \end{cases}$$

le soluzioni dell'eq. diff. data sono le funzioni $u(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x$ in $[0,3]$,

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Impoendo $u'(0) = 0$ e $u'(3) = 0$ si ottiene

come unica soluzione del sistema dato $\underline{u_0(x) \equiv 0 \text{ in } [0,3].}$

Grazie alle convexit  di f in (u, ξ) , u_0   un minimo (non ci sono altri minimi grazie alla stretta convexit  di f).

$$\bullet F(u) = \int_0^3 (u'^2 + u^2) dx, \quad \tilde{X}_3 = \{u \in \mathcal{C}^1([0,3]) : u(0) = u(3)\}.$$

Procedendo come a lezione, una funzione minimizzante $u \in \mathcal{C}^2([0,3])$

$$\text{di } F \text{ in } \tilde{X}_3 \text{ deve soddisfare } \begin{cases} u'' = u & \text{in } [0,3] \\ u(0) = u(3) \\ u'(0) = u'(3). \end{cases}$$

L'unica soluzione del sistema dato risulta essere $\underline{u_0(x) \equiv 0 \text{ in } [0,3].}$

Grazie alle convexit  di f in (u, ξ) , u_0   pt. di minimo ed   unico grazie alla stretta convexit  di f . □

$$c) \bullet F(u) = \int_0^3 [u'^2 - 6u] dx, \quad \tilde{X}_1 = \{u \in \mathcal{C}^1([0,3]) : u(0)=2\}.$$

Procedendo come a lezione, un pt. di minimo $u \in \mathcal{C}^2([0,3])$ di F in $\tilde{X}_1$ deve soddisfare

$$\begin{cases} u'' = 3 & \text{in } [0,3] \\ u(0) = 2 \\ u'(3) = 0. \end{cases}$$

Abbiamo $u(x) = -\frac{3}{2}x^2 + c_1x + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ come soluzioni dell'eq. diff. in $[0,3]$. Impostando $u(0)=2$ e $u'(3)=0$ si ottiene come unica soluzione del problema dato $u_0(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 9x + 2$, $x \in [0,3]$.

Notiamo che u_0 è pt. di minimo ed è unico: infatti, $\forall u \in \tilde{X}_1$ si ha

$$\begin{aligned} u &= u_0 + (u - u_0) \in \tilde{Z}_1 = \{v \in \mathcal{C}^1([0,3]) : v(0)=0\}; \text{ ne segue} \\ F(u) &= \int_0^3 \left[\left(u_0' + (u' - u_0') \right)^2 - 6(u_0 + (u - u_0)) \right] dx = \int_0^3 (u_0'^2 - 6u_0) dx + \\ &\quad + \underbrace{\int_0^3 [2u_0'(u' - u_0') - 6(u - u_0)] dx}_0 + \int_0^3 (u' - u_0')^2 dx \\ &= 0 \text{ poiché } u - u_0 \in \tilde{Z}_1 \text{ e } u_0 \text{ soddisfa l'eq. di Eulero-Lagrange} \\ &\quad \text{debole } \int_0^3 [2u_0'v' - 6u_0v] dx = 0 \quad \forall v \in \tilde{Z}_1; \\ &= F(u_0) + \int_0^3 (u' - u_0')^2 dx \geq F(u_0) \text{ con } \Leftrightarrow u' - u_0' = 0 \\ &\quad \Leftrightarrow u(x) = u_0(x) + c \\ &\quad \Leftrightarrow u(x) = u_0(x) \quad \forall x \in [0,3] \end{aligned}$$

poiché da $u, u_0 \in \tilde{X}_1$ segue $c=0$.

$$\bullet \boxed{F(u) = \int_0^3 [u'^2 - 6u] dx}, \quad \tilde{X}_2 = \{u \in \mathcal{C}^1([0,3])\}.$$

Procedendo come a lezione, un pt. di minimo $u \in \mathcal{C}^2([0,3])$ di F in $\tilde{X}_2$ deve soddisfare

$$\begin{cases} u'' = 3 & \text{in } [0,3] \\ u'(0) = 0 \\ u'(3) = 0. \end{cases}$$

Poiché $u(x) = -\frac{3}{2}x^2 + c_1x + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sono le soluzioni dell'eq. diff. data, abbiamo che $u'(x) = -3x + c_1$ deve soddisfare $u'(0)=0$ (quindi $c_1=0$) e $u'(3)=0$ (quindi $c_1=9$). Questo non è possibile.

Quindi F non ammette estremali. D'altra parte si ha banalmente che

$$\inf_{u \in \tilde{X}_2} F(u) = -\infty; \text{ basta osservare che } \forall n \in \mathbb{N}, u_n(x) \equiv n \text{ in } [0,3]$$

è un elemento di $\tilde{X}_2$ e $F(u_n) = -18n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.

$$\bullet F(u) = \int_0^3 [u'^2 - 6u] dx, \quad \tilde{X}_3 = \{u \in \mathcal{C}^1([0,3]) : u(0)=u(3)\}.$$

Abbiamo banalmente (procedendo come nel pr. precedente) che $\inf_{u \in \tilde{X}_3} F(u) = -\infty$. ■

Esercizio 2.

$$a) \boxed{F(u) = \int_1^2 [u' (1+x^4 u')] dx} \quad \text{in } X = \{u \in \mathcal{C}^1([1,2]) : u(1)=3, u(2)=6\}.$$

$$\begin{aligned} i) \quad f(x, u, \xi) &= f(x, \xi) = \xi + x^4 \xi^2 & f_\xi(x, \xi) &= 1 + 2x^4 \xi \\ \frac{d}{dx} [1 + 2x^4 u'] &= 0 & \Leftrightarrow & 1 + 2x^4 u' = c_1 \quad \text{in } [1,2] \\ & & \Leftrightarrow & 2x^4 u' = c_1 - 1 \quad " \\ & & \Leftrightarrow & u'(x) = \frac{c_1 - 1}{2x^4} \quad \text{in } [1,2] \\ & \Rightarrow & u(x) &= -\frac{c_1 - 1}{6x^3} + c_2 \quad \text{in } [1,2] \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$ii) \begin{cases} 3 = u(1) = -\frac{c_1 - 1}{6} + c_2 \\ 6 = u(2) = -\frac{c_1 - 1}{48} + c_2 \end{cases} \Rightarrow c_1 = \frac{151}{7}, \quad c_2 = \frac{45}{7}$$

Quindi l'estremale di F in X è dato da $u_0(x) = -\frac{24}{7x^3} + \frac{45}{7}$.

iii) Basta osservare che $\forall x \in [1,2]$ si ha $\xi \rightarrow f(x, \xi)$ è strettamente convessa.

Si può anche procedere provando direttamente che $\forall u \in X$ si ha $F(u) \geq F(u_0)$ con $\Leftrightarrow u = u_0$. Infatti $\forall u \in X$ si ha

$$\begin{aligned} u &= u_0 + (u - u_0) \quad \text{e} \\ F(u) &= \int_1^2 [u' (1+x^4 u')] dx = \int_1^2 (u'_0 + (u' - u'_0)) (1+x^4 (u'_0 + (u' - u'_0))) dx \\ &= \int_1^2 u'_0 (1+x^4 u'_0) + \int_1^2 u'_0 x^4 (u' - u'_0) dx + \int_1^2 (u' - u'_0) (1+x^4 (u'_0 + (u' - u'_0))) dx \\ &= F(u_0) + \underbrace{\int_1^2 (1+2x^4 u'_0) (u' - u'_0) dx}_{\delta F(u_0, u - u_0) = 0} + \int_1^2 x^4 (u' - u'_0)^2 dx \\ &= F(u_0) + \int_1^2 x^4 (u' - u'_0)^2 dx \geq F(u_0) \quad \text{e} \quad \Leftrightarrow u' - u'_0 = 0 \\ & \quad \Leftrightarrow u(x) = u_0(x) \\ & \quad \text{poiché } u, u_0 \in X. \quad \square \end{aligned}$$

$$b) \boxed{F(u) = \int_0^1 [u'^2 + 4u^2 + ue^x] dx} \quad \text{su } X = \{u \in C^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}.$$

$$i) f(x, u, \xi) = \xi^2 + 4u^2 + ue^x \quad f_\xi = 2\xi \quad f_u = 8u + e^x$$

$$\frac{d}{dx} [2u'] = 8u + e^x \quad \Leftrightarrow \quad 2u'' - 8u = e^x \quad \text{su } [0,1]$$

Risoliamo l'eq. diff. omogenea $2u'' - 8u = 0$. Le soluzioni dell'eq. caratteristica associata $2z^2 - 8 = 0$ sono $z_{1/2} = \pm 2$ e quindi

L'insieme delle soluzioni dell'eq. diff. omogenea è dato da

$$u(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo una soluzione particolare dell'eq. $2u'' - 8u = e^x$ della forma $\bar{u}(x) = k e^x$ con k da determinare imponendo $2\bar{u}'' - 8\bar{u} = e^x$. Ne segue

$$\bar{u}(x) = -\frac{1}{6} e^x. \quad \text{L'insieme degli estremali di } F \text{ è quindi dato da}$$

$$u(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} - \frac{1}{6} e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$$ii) \begin{cases} 0 = u(0) = c_1 + c_2 - \frac{1}{6} \\ 0 = u(1) = c_1 e^{-2} + c_2 e^2 - \frac{1}{6} e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{6} - c_2 \\ 0 = (\frac{1}{6} - c_2) e^{-2} + c_2 e^2 - \frac{1}{6} e \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{6} \frac{e^4 - e^3}{e^4 - 1}, \quad c_2 = \frac{1}{6} \frac{e^3 - 1}{e^4 - 1}.$$

L'estremale di F che appartiene a X è dunque

$$u_0(x) = \frac{1}{6} \frac{e^4 - e^3}{e^4 - 1} e^{-2x} + \frac{1}{6} \frac{e^3 - 1}{e^4 - 1} e^{2x} - \frac{1}{6} e^x.$$

iii) Basta osservare che $\forall x \in [0,1]$ si ha $(u, \xi) \rightarrow \xi^2 + 4u^2 + ue^x$ funzione strettamente convessa (procedendo come in a) iii)). $\square$

$$c) \boxed{F(u) = \int_1^2 [x^2 u'^2 + u(1 + 3x^3)] dx} \quad \text{su } X = \{u \in C^1([1,2]) : u(1) = u(2) = 0\}.$$

$$i) f(x, u, \xi) = x^2 \xi^2 + u(1 + 3x^3) \quad f_\xi = 2x^2 \xi \quad f_u = 1 + 3x^3$$

$$\frac{d}{dx} [2x^2 u'] = 1 + 3x^3, \quad \text{Integrando si ha}$$

$$2x^2 u' = x + \frac{3x^4}{4} + c_1$$

$$u'(x) = \frac{1}{2x} + \frac{3}{8} x^2 + \frac{c_1}{2x^2},$$

$$\text{ovvero } u(x) = \frac{1}{2} \log x + \frac{x^3}{8} - \frac{c_1}{2x} + c_2, \quad \text{sono tutte le soluzioni}$$

dell'eq. diff. data.

$$\text{ii)} \begin{cases} 0 = u(1) = \frac{1}{8} - \frac{c_1}{2} + c_2 \\ 0 = u(2) = \frac{1}{2} \log 2 + 1 - \frac{c_1}{4} + c_2 \end{cases}$$

Ne segue che $u_0(x) = \frac{1}{2} \log x + \frac{x^3}{8} - \left(\log \frac{1}{2} - \frac{7}{4}\right) \frac{1}{x} + \log \frac{1}{2} - \frac{15}{8}$ è l'estremale di F che appartiene a X .

iii) Basta osservare che $\forall x \in [1, 2]$ si ha $(u, \xi) \rightarrow \underbrace{x^2 \xi^2}_{\text{stet. conv. in } \xi} + \underbrace{u(1+3x^3)}_{\text{conv. in } u}$.
Potremmo anche procedere come in a) iii):

$\forall u \in X$ si ha $u = u_0 + (u - u_0)$ e

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_1^2 \left[x^2 \left(u_0' + (u' - u_0') \right)^2 + \left(u_0 + (u - u_0) \right) (1 + 3x^3) \right] dx = \\ &= \int_1^2 \left[x^2 u_0'^2 + u_0 (1 + 3x^3) \right] dx + \int_1^2 \left[2x^2 u_0' (u' - u_0') + (u - u_0) (1 - 3x^3) \right] dx + \\ &\quad + \int_1^2 x^2 (u' - u_0')^2 dx \\ &= F(u_0) + \underbrace{\delta F(u_0, u - u_0)}_{=0} + \int_1^2 x^2 (u' - u_0')^2 dx \\ &= F(u_0) + \int_1^2 x^2 (u' - u_0')^2 dx \geq F(u_0) \quad \Leftrightarrow \quad u' - u_0' = 0 \\ &\quad \Leftrightarrow u(x) = u_0(x) \quad \text{poich\'e} \quad u, u_0 \in X. \quad \square \end{aligned}$$

Esercizio 3. $F(u) = \int_0^1 e^{-u'^2} dx$, $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0, 1]) : u(0) = u(1) = 0\}$.

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad f(x, u, \xi) &= f(\xi) = e^{-\xi^2} & f_\xi &= -2\xi e^{-\xi^2} \\ \frac{d}{dx} \left[-2u' e^{-u'^2} \right] &= 0 & \Leftrightarrow & -2u'' e^{-u'^2} + 4u'^2 e^{-u'^2} = 0 \quad \text{su } [0, 1]. \end{aligned}$$

Unicamente $u_0 \equiv 0$ soddisfa l'eq. di Eulero-Lagrange sopra.

ii) Notiamo che $e^{-t^2} \leq e^0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ e quindi $e^{-u'(x)^2} \leq e^{-u_0'(x)}$

$\forall x \in [0, 1]$; ne segue $F(u) \leq F(u_0) \quad \forall u \in X$.

iii) $\forall \varepsilon > 0$, $u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4\varepsilon} \in \mathcal{C}^1([0, 1])$; inoltre $u_\varepsilon(0) = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{4\varepsilon} = 0$

$u_\varepsilon(1) = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{4\varepsilon} = 0$. Quindi $u_\varepsilon \in X$. Inoltre

$$\forall \varepsilon > 0, \quad F(u_\varepsilon) = \int_0^1 e^{-\frac{1}{\varepsilon^2} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} dx \stackrel{\substack{\uparrow \\ \frac{2}{\varepsilon} \left(x - \frac{1}{2}\right) = t}}{=} \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} e^{-t^2} \frac{\varepsilon}{2} dt < \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\pi}$$

Quindi, da $0 < F(u_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\pi}$ segue subito $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F(u_\varepsilon) = 0$.

Non può esistere min di F su X , poiché dovrebbe essere $F(\bar{u}) = 0$. 