Teorema di Green nel piano in riferimento alle Note del Corso di Analisi Matematica III per il CdL in Matematica a.a. 2015/16, prof. Silvano Delladio.

Usando le definizioni introdotte nel Corso e nelle ipotesi del Teorema 6.2 si ha il seguente risultato:

Sia E sottoinsieme composto di $\mathbb{R}^2$ e τ_E il campo di vettori unitari tangenti a ∂E continuo nelle parti interne dei tratti regolari. Se $F : E \to \mathbb{R}^2$ è un campo vettoriale di classe C^1 si ha

$$\int_{(\partial E, \tau_E)} F = \int_E (D_1 F_2 - D_2 F_1) d\mathcal{L}^2 \,, \qquad (**)$$

dove $\int_{(\partial E,\tau_E)} F := \int_{\partial E} F \cdot \tau_E d\mathcal{H}^1$ (vedi Definizione 6.5).

Considerando il caso particolare $F(x, y) = (0, x)$ e $\tau_E := \dfrac{\gamma'}{|\gamma'|}$ (vedi Definizione 6.1) con $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ dove s parametro ascissa curvilinea (quindi $\tau_E = (x'(s), y'(s))$ essendo $|\gamma'(s)| = 1$), si ottiene $\int_{(\partial E,\tau_E)} F = \displaystyle\int_{\partial E} x(s)y'(s)ds$ e $\int_E (D_1F_2 - D_2F_1)d\mathcal{L}^2 = \int_E dx\, dy = \text{area}(E)$ e da (**) segue

$$\text{area}(E) = \int_{\partial E} x(s)y'(s)ds \,.$$

Considerando il caso particolare $F(x, y) = (-y, 0)$ e $\tau_E := \dfrac{\gamma'}{|\gamma'|}$ (vedi Definizione 6.1) con $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ dove s parametro ascissa curvilinea, si ottiene $\int_{(\partial E,\tau_E)} F = -\displaystyle\int_{\partial E} y(s)x'(s)ds$ e $\int_E (D_1F_2 - D_2F_1)d\mathcal{L}^2 = \int_E dx\, dy = \text{area}(E)$ e da (**) segue

$$\text{area}(E) = -\int_{\partial E} y(s)x'(s)ds \,.$$