Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione

CdL in Informatica, Ingegneria dell'informazione e delle comunicazioni e Ingegneria dell'informazione e organizzazione d'impresa

a.a. 2017-2018 - Foglio di esercizi 10 ...*"continuità, derivabilità e limiti con de l'Hôpital"*

1) Determinate i valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ per i quali la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \sin x + \beta e^x & \text{se } x < 0 \\ \arcsin(\alpha x^2 + x) - 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{sia continua e derivabile in } x_0 = 0\,.$$

2) Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + \alpha \sin x & \text{se } x < 0 \\ \log(1 + 3x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{risulta derivabile in } x_0 = 0\,?$$

3) Determinate l'espressione di una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua e derivabile soddisfacente entrambe le seguenti proprietà:

i) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = -1\,;$

ii) $\max_{x\in\mathbf{R}} f(x) = 1\,.$

4) Determinate l'espressione di una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua e derivabile soddisfacente entrambe le seguenti proprietà:

i) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\,;$

ii) f ha un minimo locale in $\mathbf{R}$.

5) Sia $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Quali delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?

i) Se f è derivabile in $[0,1]$ e se x_0 è un punto di minimo per f, allora $f'(x_0) = 0$.

ii) f ha un massimo in $[0,1]$.

iii) Se x_0 è un punto di minimo per f, allora f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = 0$.

iv) f ha un minimo in $[0,1]$ solo se esiste un punto x_0 in cui $f'(x_0) = 0$.

6) Calcolate utilizzando il teorema di de l'Hôpital (e non solo...) i seguenti limiti:

i) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\log\cos x}{\arctan x^2}\,;$ ii) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{\log x}{\log\sin x}\,;$ iii) $\displaystyle\lim_{x\to1^+} \Big(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1}\Big)\,;$

iv) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\arctan(\frac{1}{1+x^2}) - \frac{\pi}{4}}{x}\,;$ v) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin(\frac{1}{1+x})}{\sqrt{x}}\,;$

vi) $\lim_{x\to-\infty} x^3\left(\frac{\pi}{2} + \arctan x - \frac{1}{x}\right)$; vii) $\lim_{x\to 1} \frac{\cos\sqrt{x^2-1} - 1}{\log(x + 2(x^2-1))}$;

viii) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$; ix) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\tan x - x}$.