Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione

CdL in Informatica, Ingegneria dell'informazione e delle comunicazioni e Ingegneria dell'informazione e organizzazione d'impresa

a.a. 2017-2018 - Foglio di esercizi 13 ..."*Serie à gogo ... e primi contatti con la funzione integrale*"

13.1) Sia $a_n = \frac{2^{n\alpha}}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}$ per $\alpha \in \mathbf{R}$. Determinate, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, il carattere di a_n e di $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

13.2) Determinate il carattere delle seguenti serie:

$$\text{i)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n^4}{n^2+n}\,; \quad \text{ii)}\ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\log n}\,; \quad \text{iii)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(\frac{n+3}{n+1})}{n}\,; \quad \text{iv)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \log(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}^3})\,.$$

13.3) Determinate il carattere delle seguenti serie:

$$\text{i)}\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+2^n}{n!}\,; \qquad \text{ii)}\ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{n|\alpha|-n}}{n\log^2 n} \ \text{ al variare di } \alpha \in \mathbf{R}\,.$$

13.4) Discutete la convergenza delle seguenti serie:

$$\text{i)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n(1+\log^{\frac{5}{4}} n)}\,; \qquad \text{ii)}\ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha^2+\frac{1}{2}}(\log n)^{\alpha+\frac{3}{4}}}\,;$$

13.5) Studiate la convergenza assoluta e la convergenza (semplice) delle seguenti serie:

$$\text{i)}\ \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \frac{n-1}{n\sqrt{\log n}}\,; \qquad \text{ii)}\ \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \frac{\arctan\frac{1}{\sqrt{n}}}{n\sqrt{\log n}}\,.$$

13.6) a) Determinate al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(e^{\alpha^2-1})^n}{n^3 e^n}$.

b) Determinate al variare di $\alpha > -2$ il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |\log(2+\alpha)|^n$.

13.7) Determinate al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}[\log(1+\frac{3}{n}) - \frac{\alpha}{n}]\sqrt{n}$.

13.8) Data la serie $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \frac{4^n(\arctan x)^n}{(n+\sin n)\pi^n}$ determinate, al variare di $x \in \mathbf{R}$

i) la convergenza assoluta

ii) la convergenza (semplice) della serie.

13.9) Determinate il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza delle seguenti serie di potenze:

i) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n\sqrt{n}+1)2^n}$; ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-\frac{1}{n})^{2n^2}}{n^2} x^n$; iii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{n+\sqrt[3]{n}}$.

13.10) Determinate l'insieme di convergenza delle seguenti serie:

i) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2x-1)^n}{n(\log n^2)}$; ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{2}-1)^n (\log x)^n$; iii) $\sum_{n=1}^{+\infty} (e^n+\pi^n)x^{2n}$.

13.11) Data la funzione integrale $F(x) = \int_0^x e^t \arctan t \, dt$ su $[-1,1]$

i) scrivete il polinomio di Taylor di ordine 3 di $F(x)$ centrato in 0.

ii) calcolate $\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)+\log(1+x)-\sin x}{x^3}$.

13.12) Calcolate $\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x (e^{-\frac{t^2}{2}}-\cos t)\, dt}{\sin x^5}$.

13.13) Determinate i punti critici di $F(x) = \int_0^x (t^2-3t+2)(\arctan(\log(1+t^2))\, dt$. Determinate poi la loro natura.