Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione

CdL in Informatica, Ingegneria dell'informazione e delle comunicazioni e Ingegneria dell'informazione e organizzazione d'impresa

a.a. 2017-2018 - Foglio di esercizi 14 ...*"il mondo delle primitive - integrali e la funzione integrale"*

Qui in seguito sono proposti alcuni esercizi (raccolti per tipologia) su questi argomenti visti a lezione. Potete trovare ulteriori esercizi in materiale didattico-on-line, nell'a.a. 2014/15 Esercizi-9-09-12.

14.1) a) Determinate per quali valori di $a\,, b \in \mathbf{R}$ risulta derivabile su $\mathbf{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x (e^{-t^2} + t)\,dt & \text{se } x > 0 \\ a^2 \sin x + b & \text{se } x \le 0\,. \end{cases}$$

b) Calcolate il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x^2} \int_0^{\log^2(1+2x)} \sqrt[3]{1+t^2}dt\,.$$

14.2) i) Provate che la funzione $F(x) = \frac{x}{2}\sqrt{4+x^2} + 2\log\big(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4+x^2}\big)$ è una primitiva della funzione $f(x) = \sqrt{4+x^2}$ su $\mathbf{R}$.

ii) Calcolate $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx\,.$

iii) Calcolate $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{F(x) - 2x}{x^3}\,.$

14.3) Usando la tabella delle primitive elementari (o quasi immediate), determinate le primitive delle seguenti funzioni:

i) $f(x) = \cos 3x + e^{-2x}$; ii) $f(x) = \dfrac{(\log x)^3}{x} - x2^{x^2}$; iii) $f(x) = \dfrac{1}{1+4x^2} + \dfrac{2}{1-x}\,.$

14.4) Calcolate i seguenti integrali quasi immediati (confrontate l'esercizio con l'esercizio 14.3):

$$\int \frac{\sqrt[3]{x} - \log^2 x}{2x}dx\,; \quad \int \frac{x}{x^2+1}dx\,; \quad \int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx\,; \quad \int \frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}}dx\,; \quad \int \frac{1}{\cos^2 2x}dx\,.$$

14.5) Calcolate i seguenti integrali immediati (dopo aver fatto piccole operazioni algebriche e ricordato la definizione di valor assoluto!)

$$\int_1^2 \frac{x^3 - 2x + e}{x}dx\,; \quad \int_0^2 \frac{9^x - 1}{3^x + 1}dx\,; \quad \int_{-1}^4 |x^2 - 2x|dx\,; \quad \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|dx\,.$$

14.6) Calcolate per parti i seguenti integrali:

$$\int x \arcsin x dx\,; \quad \int x^4 \log 2x dx\,; \quad \int (2x+1)^2 e^x dx\,; \quad \int x^3 e^{-x} dx\,; \quad \int \log(1+x^2) dx\,.$$

14.7) Calcolate i seguenti integrali usando delle sostituzioni opportune (e integrando eventualmente poi funzioni razionali oppure per parti):

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}+1} dx\,; \quad \int \sqrt{4-x^2} dx\,; \quad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx\,; \quad \int \frac{1}{\cos x} dx\,; \quad \int \sqrt{2+x^2} dx\,.$$

14.8) Determinate i seguenti integrali di funzioni razionali:

$$\int \frac{1}{2x-4x^2} dx\,; \quad \int \frac{x+3}{x^2+2} dx\,; \quad \int \frac{x+1}{x(x-2)} dx\,; \quad \int \frac{3x^3+x^2}{x+1} dx\,; \quad \int \frac{1}{x^2+x+2} dx\,.$$

14.9) Studiate brevemente la funzione $f(x) = -xe^{x^2} + e$ e tracciate un suo grafico qualitativo. Determinate l'area della regione piana E delimitata dal grafico di f e dalle rette di equazione $x = 0$ e $y = 0$.

14.10) Studiate la funzione integrale $F(x) = \int_0^x (e^{2t^2} - 4e^{t^2} + 5) dt$ su $\mathbf{R}$: segno, monotonia, concavità/convessità di F.