

1.1) Risolvete le seguenti disequazioni trigonometriche:

a)  $\sin(2x) > \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;      b)  $0 \leq \cos(x+1) < 1$ ;  
 c)  $2\sin^2 x - \sin x > 1$ ;      d)  $\begin{cases} 5\sin^2 x + \sin x + \cos^2 x < \frac{5}{2} \\ \sin x \geq 0. \end{cases}$

1.2) Verificate che per ogni  $z \in \mathbf{C}$  vale  $\overline{z^2 + |z|(z+1)} = \bar{z}^2 + |z|(\bar{z}+1)$ .

1.3) Determinate le potenze  $z^3$  e  $z^4$  del numero complesso  $z = \left(\frac{2+2\sqrt{3}i}{|1-\sqrt{3}i|}\right)i$ .

1.4) Risolvete in  $\mathbf{C}$  le seguenti equazioni:

a)  $\bar{z}z - \bar{z} + \frac{i}{4} = 0$ ;  
 b)  $z|z| - 3z + 2i = 0$ .

1.5) Risolvete in  $\mathbf{C}$  le seguenti equazioni di secondo grado:

a)  $4z^2 - 4z + 2 - \sqrt{3}i = 0$ ;  
 b)  $z^2 + 2iz - 1 - i = 0$ .

1.6) Risolvete ed interpretate geometricamente nel piano di Gauss:

a)  $\begin{cases} |z+1+i| = 1 \\ \operatorname{Re}z + \operatorname{Im}z + 2 = 0 \end{cases}$ ;      b)  $\operatorname{Re}(3z + 5\bar{z} - z^2 - z\bar{z}) = 2\operatorname{Im}z$ .

1.7) Determinate le soluzioni  $(z, w)$  con  $z, w \in \mathbf{C}$  dei sistemi

a)  $\begin{cases} z^2 + wi = i \\ w + z = 1 \end{cases}$ ;      b)  $\begin{cases} z\bar{w} = 2i \\ z^4 = 2iw^2 \end{cases}$ .

1.8) Provate, usando il principio di induzione, che

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{n}{2n+1} \text{ per ogni } n \in \mathbf{N}, n \geq 1.$$