

1.1) Risolvete le seguenti disequazioni trigonometriche:

a) $\sin(2x) > \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $0 \leq \cos(x+1) < 1$;

c) $2\sin^2 x - \sin x > 1$; d) $\begin{cases} 5\sin^2 x + \sin x + \cos^2 x < \frac{5}{2} \\ \sin x \geq 0. \end{cases}$

1.2) Verificate che per ogni $z \in \mathbf{C}$ vale $\overline{z^2 + |z|(z+1)} = \overline{z}^2 + |z|(\overline{z} + 1)$.

1.3) Determinate le potenze z^3 e z^4 del numero complesso $z = \left(\frac{2+2\sqrt{3}i}{|1-\sqrt{3}i|}\right)i$.

1.4) Risolvete in \mathbf{C} le seguenti equazioni:

a) $\overline{z}z - \overline{z} + \frac{i}{4} = 0$;

b) $z|z| - 3z + 2i = 0$.

1.5) Risolvete in \mathbf{C} le seguenti equazioni di secondo grado:

a) $4z^2 - 4z + 2 - \sqrt{3}i = 0$;

b) $z^2 + 2iz - 1 - i = 0$.

1.6) Risolvete ed interpretate geometricamente nel piano di Gauss:

a) $\begin{cases} |z+1+i| = 1 \\ \operatorname{Re}z + \operatorname{Im}z + 2 = 0 \end{cases}$; b) $\operatorname{Re}(3z + 5\overline{z} - z^2 - z\overline{z}) = 2\operatorname{Im}z$.

1.7) Determinate le soluzioni (z, w) con $z, w \in \mathbf{C}$ dei sistemi

a) $\begin{cases} z^2 + wi = i \\ w + z = 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} z\overline{w} = 2i \\ z^4 = 2iw^2 \end{cases}$.

1.8) Provate, usando il principio di induzione, che

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{n}{2n+1} \text{ per ogni } n \in \mathbf{N}, n \geq 1.$$