

1.1) Risolvete in \mathbf{C} le seguenti equazioni:

$$a) \ (-z + 2)^3 = -i; \quad b) \ z|z| + 4i = 0; \quad c) \ 4z^2 - 2(1+i)z + i = 0.$$

1.2) Risolvete e rappresentate geometricamente nel piano di Gauss:

$$a) \ \begin{cases} |z - 3 + i| < |z + 1 - i| \\ |\operatorname{Im}(z - i)| < 2; \end{cases} \quad b) \ \begin{cases} \operatorname{Re}(iz^2 - i\bar{z}^2) \geq -4 \\ |z - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\sqrt{2}| \leq \sqrt{2}; \end{cases} \quad c) \ |z + 3 - 2i| = |\operatorname{Im}(z - i)|.$$

1.3) Determinate le soluzioni (z, w) con $z, w \in \mathbf{C}$ del sistema $\begin{cases} z - w = 2 - i \\ |w|^2 - \bar{z}w = i. \end{cases}$

1.4) Provate, usando il principio di induzione, che $(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) \cdots (1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

1.5) i) Fissati $a, b \in \mathbf{R}$ (in \mathbf{C}), verificate che $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k$ per $n = 1, 2, 3$.

ii) Provate, usando il principio di induzione, che $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$.

iii) Risolvete in \mathbf{C} l'equazione $z^7 + z^6 + z^5 + \dots + z + 1 = 0$ e rappresentate le soluzioni nel piano di Gauss (suggerimento: può essere utile usare ii) con $a = z$ e $b = 1$).

1.6) Usando le conoscenze basi sulle funzioni elementari, leggendo dal grafico determinate l'immagine di A tramite f per le seguenti funzioni:

$$i) \ f(x) = 3 \log x - 1 \quad A = [1, e];$$

$$ii) \ f(x) = -x^2 - x + 1 \quad A = [-1, 1];$$

$$iii) \ f(x) = -\cos x + 1 \quad A = [0, \pi];$$

$$iv) \ f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq -1 \\ -x^2 & \text{se } -1 < x < 0 \\ 2^x - 2 & \text{se } x \geq 0. \end{cases} \quad A =] -2, 2].$$

1.7) Sia $f : [0, e] \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{x} - 1 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \log x & \text{se } 1 < x \leq e. \end{cases}$

Usando le conoscenze basi sulle funzioni elementari, leggendo dal grafico di f si determini l'immagine e gli intervalli di monotonia di f . La funzione f è limitata? Iniettiva? Suriettiva?