Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione

CdL in Informatica, Ingegneria dell'informazione e delle comunicazioni e Ingegneria dell'informazione e organizzazione d'impresa

a.a. 2017-18 - PIAZZA6 - *"... funzioni elementari-grafici-trasformazioni ..."*

1.1) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1 & \text{se } x \leq 0 \\ -2|x-1| + 2 & \text{se } x > 0. \end{cases}$

Rappresentate graficamente le funzioni $f(x)$, $|f(x)|$, $-2f(x)$, $f(x+1)$ e $f(x)+1$.

1.2) Sia $f : [1, +\infty[\to \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

a) Determinate l'immagine di f, ossia $f([1, +\infty[)$.

b) Determinate $f^{-1} : f([1, +\infty[) \to [1, +\infty[$ e rappresentatela graficamente (sia usando l'espressione analitica di f^{-1} che le proprietà geometriche del grafico di f^{-1}).

c) Deducete da quanto sopra che l'equazione $x^2 - 2x + 3 = 1 + \sqrt{x-2}$ non ammette soluzione.

1.3) Leggendo il loro grafici, dite se le funzioni sono pari/dispari, limitate, monotone (individuando eventualmente degli intervalli di monotonia). Determinate l'estremo inferiore/superiore, e dite se sono minimo/massimo rispettivamente.

i) $f(x) = \begin{cases} \arcsin(|\frac{1}{2}x| - 1) & \text{se } -4 \leq x \leq 4 \\ \sqrt{|x| - 4} + \frac{\pi}{2} & \text{se } x < -4 \text{ o } x > 4. \end{cases}$

ii) $f(x) = -|\log|x+1|| + 2$ nel suo insieme di definizione.

iii) $f(x) = \begin{cases} -e^x + e & \text{se } x < 1 \\ \arctan(x-1) & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

1.4) Siano $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} |\arcsin x| & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{\pi}{2}|x| + \pi & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad g(x) = x^2 - 4\,.$$

a) Rappresentate graficamente f e g.

b) Determinate le funzioni composte $(g \circ f)(x)$ e $(f \circ g)(x)$.

1.5) Siano $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \leq 1 \\ \log_{\frac{1}{2}}(x-1) & \text{se } x > 1, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} e^{x+2} - 1 & \text{se } x \leq -2 \\ \sqrt{x+2} & \text{se } x > -2. \end{cases}$$

a) Rappresentate graficamente f e g.

b) Determinate le funzioni composte $(g \circ f)(x)$ e $(f \circ g)(x)$.

1.6) i) Rappresentate graficamente $f(x) = x^2 - |2x - 1|$ e $g(x) = |\arccos(|x| - 1) - \frac{\pi}{2}|$.

ii) Determinate, al variare di $k \in \mathbf{R}$ il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

iii) Determinate il massimo/minimo (punti di minimo/punti di massimo) di g sul suo dominio naturale.

1.7) i) Rappresentate graficamente la funzione $f(x) = \frac{1}{2}(x - 1)(x + |x + 2|)$.

ii) Determinate il più grande intervallo $\mathcal{I}$ contenuto o uguale $]-\infty, 0]$ tale che f ristretta ad $\mathcal{I}$ risulti iniettiva. Determinate la funzione inversa $f^{-1} : f(\mathcal{I}) \to \mathcal{I}$ e rappresentatela graficamente.