

- 1) i) Scrivete in matematiche (... $\forall \varepsilon > 0, \dots$ oppure $\forall M > 0, \dots$) la definizione di

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2.$$

- ii) Scrivete per ciascun limite in i) l'espressione di una funzione con il comportamento espresso dal limite.

- 2) Provate, usando la definizione di limite, che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$.

- 3) Calcolate, se esistono, i seguenti limiti:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - \frac{1}{x+1}); \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{5}{x^2+1} + \frac{\sin x}{x+1}); \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x + \sqrt{x^2+1}); \\ \text{ii)} \quad & \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{4+x}{|x|-2}; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{4+x}{|x|-2}; \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{5x^2+1}{x^3+1}; \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\log(x+1)}{x^2-4}; \\ \text{iii)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \cos \frac{1}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2+1 + \arctan(-x)); \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{|x|} + \sin x \cos x). \end{aligned}$$

- 4) Calcolate, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x \cos x}{x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x^3}{\sqrt{x}+1}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \arctan x); \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{x} \cos \frac{1}{x^2}.$$

- 5) Calcolate, se esistono, i seguenti limiti:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3+2x^2}{4x^4+x^5}; \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} (\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x^2-4}); \\ \text{ii)} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4+3x}{x-1-2x^4}; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+3\sqrt{x}}{2x-6\sqrt{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3\sqrt{|x|}}{2x-6\sqrt{|x|}}; \\ \text{iii)} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4-x}{\sqrt{x}+3x^4}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^3}{x^2-1}); \\ \text{iv)} \quad & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\arctan x - x^2}{2+x^k} \text{ per } k \in \{1, 2, 3\}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+x}{\sqrt{-x}-1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}; \\ \text{v)} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{4-x}}{x-1}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\alpha(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})} \text{ per } \alpha \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

- 6) Dite se i seguenti insiemi sono limitati inferiormente/superiormente, limitati. In caso affermativo, determinate l'estremo superiore e l'estremo inferiore (motivando la risposta). Dite se sono massimo e/o minimo, rispettivamente.

i) $A = \{x_n = \cos(\frac{2}{n+3}) : n \in \mathbf{N}, n \geq 0\};$

ii) $B = \{x_n = \arctan(\frac{n-2}{n}) : n \in \mathbf{N}, n \geq 1\};$

iii) $C = \{x_n = e^{\arcsin(1-\frac{1}{n})} : n \in \mathbf{N}, n \geq 1\};$

iv) $D = \{x_n = \log_{\frac{1}{2}}(\arcsin(1 - \frac{1}{n})) : n \in \mathbf{N}, n \geq 2\}.$

7) Determinate, se esistono, $\alpha \in \mathbf{R}$ tali che le funzioni $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definite da

$$f(x) = \begin{cases} \sin x - \alpha & \text{se } x < 0 \\ -2 & \text{se } x = 0 \\ x^2 - 2 & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \alpha(\sin x - 1) & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

risultino continue su tutto $\mathbf{R}$.

8) Determinate, se esistono, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ tali che le funzioni $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definite da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ \alpha \cos x + \beta \sin x & \text{se } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \cos(\frac{\pi}{2} + x) & \text{se } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x < 0 \\ 2x + \beta & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \log(x + |\alpha|) & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

risultino continue su tutto $\mathbf{R}$.