Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione

CdL in Informatica, Ingegneria dell'informazione e delle comunicazioni e Ingegneria dell'informazione e organizzazione d'impresa

a.a. 2017-2018 - Foglio di esercizi 9 ..."*continuità, derivabilità e teoremi fondamentali*"

1) Determinate l'insieme di definizione di ciascuna delle seguenti funzioni ed individuate eventuali asintoti:

$$f(x) = \frac{-2x^2 + \sin|x|}{|x+1|}\,; \qquad f(x) = e^{-x} + \arctan\frac{1}{x}\,.$$

2) Quali delle seguenti equazioni ammettono soluzioni reali? In caso affermativo, sono uniche?

$$e^{-x} - \arctan x = -1\,; \qquad 1 - x^4 = 4x^2\,; \qquad 2x^4 + |x| = 1\,; \qquad x^{33} + x + 1 = 0\,.$$

3) Provate che l'equazione $2x^4 = 1 - x^3$ ammette una ed una sola soluzione nell'intervallo $[0,1]$. Determinate un intervallo $[\widetilde{a},\widetilde{b}] \subset\,]0,1[$ con $x_0 \in]\widetilde{a},\widetilde{b}[$ e $\widetilde{b} - \widetilde{a} \leq \frac{1}{4}$.

4) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che

$$(*) \qquad \frac{|x|}{2} \leq f(x) \leq 2|x| \qquad \forall x \in [-1,1]\,.$$

Quali delle seguenti affermazioni sono vere per qualsiasi funzione f soddisfacente (*)?

i) $\exists x_0 \in [-1,1] : \; f(x_0) = \frac{3}{4}$; ii) $\exists x_0 \in [-1,1] : \; f(x_0) = \frac{1}{2}$;

iii) $\exists x_0 \in [-1,1] : \; f(x_0) = 2$; iv) $\exists x_0 \in [-1,1] : \; f(x_0) = \frac{3}{2}$.

5) i) Dite per quali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ risulta finito il seguente limite $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1 + x^\alpha)}{\sin\sqrt{x}}$.

ii) Determinate il valore $\alpha \in \mathbf{R}$ tale che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x + x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ \dfrac{\log(1 + x^\alpha)}{\sin\sqrt{x}} & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

verifica le ipotesi del teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-1,1]$.

6) Dite se il teorema di Weierstrass è applicabile a ciascuna delle seguenti funzioni negli intervalli indicati:

i) $f(x) = \log x$ su $]0, +\infty[$;

ii) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(\arctan x)^2} & \text{se } x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0\,; \end{cases}$ $\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\arctan x} & \text{se } x \in [-1,0[\\ x^2 \sin \dfrac{1}{x} + 1 & \text{se } x \in]0,1] \\ 1 & \text{se } x = 0\,. \end{cases}$

7) Dite quali delle seguenti funzioni non sono derivabili in $x = 0$:

$|x| \sin x\,; \quad |e^x - 1|\,; \quad |x|(\cos x - 1)\,; \quad \arcsin \sqrt{x}\,.$

8) Calcolate, dove esiste, la derivata prima delle seguenti funzioni:

$\arcsin(3x + e^{4x})\,; \;\; x \arctan 2x\,; \;\; \log(\arccos(5x-1))\,; \;\; (\sin^2 x + \sqrt[4]{x})^2\,; \;\; \sqrt{1 + \sqrt{x^2+1}}\,.$

9) Dite se le seguenti affermazioni sono vere, fornendo eventualmente dei controesempi oppure citando teoremi visti a lezione.

a) Se la funzione f è derivabile, allora la funzione $|f|$ è derivabile.
b) Se la funzione f è derivabile, allora la funzione $|f|$ è continua.
c) Se la funzione f^2 è continua, allora la funzione f è continua.
d) Se la funzione $|f|$ è continua, allora la funzione f è continua.

10) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile tale che $f'(1) = 0$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. Quali delle seguenti affermazioni risulta sempre vera?
a) La funzione ha tangente orizzontale al grafico di f nel punto $(1, f(1))$.
b) $x = 1$ deve essere un punto di massimo locale stretto per f.
c) $f(1) > 0$.

11) Siano $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ due funzioni derivabili tali che $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$, $f'(0) = \dfrac{1}{2}$ e $g(x) = \cos(f(x^2 - 1))$. Determinate $g'(1)$.

12) Date le funzioni $f(x) = \sqrt{x} - x^3$ su $[0, +\infty[$ e $g(x) = \arctan(x+1)$ su $\mathbf{R}$, determinate $(g \circ f)'(1)$.

13) i) Sia $f(x) = x^3 e^{3x-2}$ definita su $\mathbf{R}$. Determinate $(f^{-1})'(e)$.

ii) Sia $f(x) = x - e + \log x$ definita su $]0, +\infty[$. Determinate $(f^{-1})'(1)$.

iii) Sia $f(x) = x + \arctan x$ su $\mathbf{R}$. Scrivete l'equazione della retta tangente al grafico di f^{-1} nel punto $(1 + \frac{\pi}{4}, 1)$.

14) Verificate che $f(x) = e^{x(x^2-1)}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle su $[0,1]$. Determinate i punti $c \in]0,1[$ tali che $f'(c) = 0$.

15) Sia g una funzione continua su $[1,3]$, derivabile nell'intervallo $]1,3[$ e tale che $g(3) = \dfrac{1}{2}$.
Sia $f : [1,3] \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x) = 2x + (g(x) - \sin \dfrac{\pi}{2x}) \arcsin(\dfrac{x-1}{2})$.
Provate che esiste $x_0 \in]1,3[$ tale che $f'(x_0) = 2$.