Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione

CdL in Informatica, Ingegneria dell'informazione e delle comunicazioni e Ingegneria dell'informazione e organizzazione d'impresa

a.a. 2017-18 - PIAZZA1 - *"Insiemistica-Estremo inferiore/superiore"*

1.1) i) Sia $A \subseteq \mathbf{R}$. Dite se le seguenti proposizioni sono sempre vere:

a) $\exists y \in \mathbf{R} : \forall x \in A, x \leq y$;

b) $\forall x \in A, \exists y \in A : x < y$;

c) $\exists y, z \in \mathbf{R} : \forall x \in A, y < x < z$.

ii) Scrivete la negazione delle proposizioni in i).

1.2) Siano dati due insiemi non vuoti E ed F, con $F \subset E \subset \mathbf{R}$. Allora necessariamente

a) se F è limitato inferiormente, lo è anche E.

b) se esiste $\min F$, allora esiste $\min E$.

c) se E è limitato superiormente, allora esiste $\sup F$.

d) $E \times F \subseteq E \times E$.

1.3) Sia $A = \{x \in \mathbf{R} : x = \sqrt{2} - \frac{1}{k}, k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}\}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) A ammette minimo.

b) $\sup A = \sqrt{2} + 1$, ma non è massimo.

c) $\inf A = \sqrt{2}$.

d) A non è limitato.

1.4) Sia $A = \{x_n = 1 + (-1)^n \dfrac{(n-1)}{3n} : n \in \mathbf{N}, n \geq 1\}$.

a) Verificate che l'insieme A è limitato.

b) Determinate, usando la caratterizzazione, l'estremo superiore ed inferiore di A. Dite se sono massimo e minimo, rispettivamente.

1.5) Sia $B = \{x \in \mathbf{R} : |(x-2)(x-x^3)| \leq 0\}$.

a) Determinate l'insieme $\mathcal{P}(B)$ delle parti di B.

b) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme $B \times [1, 3]$.

c) Determinate l'estremo superiore e inferiore di B. Dite se sono massimo e minimo, rispettivamente.

1.6) a) Determinate $A = \{x \in \mathbf{R} : x|x| + |x^2 - 1| \geq 2x\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : \sqrt[3]{x^2 - 1} \leq 2\}$ e $C = \{x \in \mathbf{R} : \sqrt[4]{1 - |x|} < 1\}$ e rappresentateli sulla retta reale.

b) Dite se sono intervalli. Verificati se A e B sono insiemi disgiunti.

c) Determinate gli insiemi $B \cup C$, $B \cap C$ e $B \setminus C$.

1.7) Sia $D = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leq \dfrac{|x-4| - 1}{|x-3| + 1} < \dfrac{1}{2}\}$. Dite se D è un intervallo. Determinate $\inf D$ e $\sup D$.