Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione

CdL in Informatica, Ingegneria dell'informazione e delle comunicazioni e Ingegneria dell'informazione e organizzazione d'impresa

a.a. 2017-18 - PIAZZA2 - *"Disequazioni"*

1.1) Calcolate i seguenti logaritmi: $\log_4 \dfrac{1}{16}$; $\quad \log_2 \sqrt[4]{2}$; $\quad \log_{\sqrt{5}} 125$; $\quad \log_{\frac{1}{4}} \dfrac{4}{64}$.

1.2) Determinate, al variare di $y \in \mathbf{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $x^2-x+2 = y$.

1.3) Determinate l'insieme delle $x \in \mathbf{R}$, per le quali è ben definito

a) $\sqrt{|x-1|+2x}$; $\quad$ b) $\sqrt[3]{\log(x-\sqrt{x})}$; $\quad$ c) $\sqrt[4]{1-\log x}$; $\quad$ d) $\log|e^x - \dfrac{1}{e}|$.

1.4) Risolvete le seguenti disequazioni logaritmiche:

i) $2\log_{\frac{1}{2}}(x-1) - \log_{\frac{1}{2}} x^2 > 0$;

ii) $\log_3(2x+\sqrt{x^2-1}) + \log_{\frac{1}{3}} 2x < 0$;

iii) $\log(x-\sqrt{x}) < 1$.

1.5) Risolvete le seguenti disequazioni :

i) $|1-|x^2-1|| \leq 2$; $\qquad e^{|x|}e^{1-x^2} > e$;

ii) $(2-|x|)e^{x^3-1} < 0$; $\qquad (2-|x|)\log(x^2-1) < 0$;

iii) $t^2 - (\log_2 4)t + \log_3 \frac{1}{3} \geq 0$; $\qquad e^{2x} - (\log_2 4)e^x + \log_3 \frac{1}{3} < 0$.

1.6) Quali delle seguenti proposizioni sono vere e quali sono false?

a) $\forall y \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R} : e^x = y$;

b) $\exists y \in \mathbf{R} : \forall x \in \mathbf{R}, e^x > y$;

c) $\exists x \in \mathbf{R}, x > 0 : x^6 = 4$;

d) $\exists x \in \mathbf{R}, x < 0 : 2^x = 3^{-1}$.

1.7) Quali delle seguenti uguaglianze sono vere e quali sono false?

i) $\log(x^2-1) = \log(x+1) + \log(x-1) \qquad \forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$;

ii) $\log(x^2-1) = \log(x+1) + \log(x-1) \qquad \forall x \in]1, +\infty[$;

iii) $\log(x^2-1) = [\log(x+1)][\log(x-1)] \qquad \forall x \in]1, +\infty[$.

1.8) Sia $A = \{x_n = \dfrac{3n-1}{n^2} : n \in \mathbf{N}, n \geq 1\}$.

i) Provate che $0 < x_n \leq 2$ per ogni $n \in \mathbf{N}\, n \geq 1$.

ii) Provate che $\inf A = 0$ e $\sup A = 2$.

iii) Dite se sono minimo e massimo, rispettivamente.