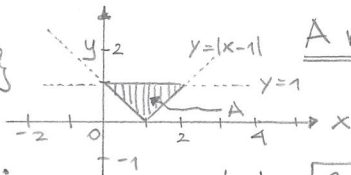


Università degli Studi di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
 CdL in Informatica - CdL in Ingegneria dell'Informazione e delle Comunicazioni
 CdL in Ingegneria dell'Informazione e Organizzazione d'Impresa
 ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1
 a.a. 2017-2018 - TRENTO, 15 gennaio 2018

FILA (A) 21) $\log|x| \leq 0 \Leftrightarrow 0 < |x| \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \Rightarrow A = [-1, 1] \setminus \{0\}$;

22) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x-1| \leq y \leq 1\}$  A non è un intervallo. ☐

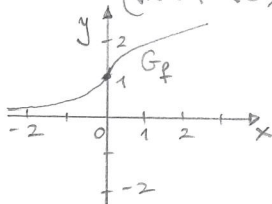
23) $z = i(1-3i) \Rightarrow \underline{z = 3+i}$ $|z| = \sqrt{9+1} = \underline{\sqrt{10}}$. ☐

24) $A = \{x_n = \arcsin(1 - \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$ $\frac{1}{n} \searrow 0 \Rightarrow -\frac{1}{n} \nearrow 0$
 $\Rightarrow 1 - \frac{1}{n} \nearrow 1$. Poiché $\arcsin x \nearrow \Rightarrow x_n \nearrow$
 $\Rightarrow \underline{\inf A = \min A = x_1 = \arcsin 0 = 0}$ $\underline{\sup A = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}}$. ☐

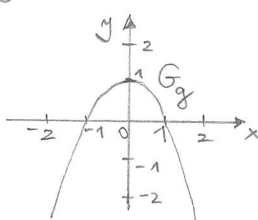
25) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-n}) = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$. Infatti,

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-n} &= (\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-n}) \frac{(\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2-n})}{(\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2-n})} = \frac{n^2+2n - (n^2-n)}{\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2-n}} = \frac{n^2+2n - (n^2-n)}{n(\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{1+\frac{-1}{n}})} \\ &= \frac{3n}{n(\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{1+\frac{-1}{n}})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \underline{\underline{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$
 ☐

26) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$



$g(x) = -x^2 + 1$.



$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} e^{g(x)} & \text{se } g(x) < 0 \\ \sqrt{g(x)+1} & \text{se } g(x) \geq 0 \end{cases}$$

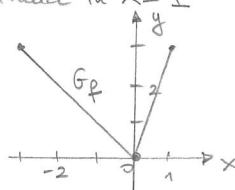
$$= \begin{cases} e^{-x^2+1} & \text{se } x < -1 \text{ o } x > 1 \\ \sqrt{-x^2+1} + 1 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

27) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \leq 1 \\ ax^2+b & \text{se } x > 1 \end{cases}$ f continua in $x=1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ ☐

$\Leftrightarrow 3 = a+b$
 f è derivabile in $x=1 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) \\ \text{coll. di} \\ \text{del'Hôpital} \end{cases} \Leftrightarrow 1 = 2a$

per a, b t.c. f è continua in $x=1$
 $\Rightarrow \underline{a = \frac{1}{2}} \quad \underline{b = \frac{5}{2}}$.

28) $f(x) = x + 2|x| = \begin{cases} 3x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$



$\min_{[-3,1]} f = \underline{0}$ $\max_{[-3,1]} f = \underline{3}$. ☐

29) $F(x) = \int_{2x}^{x^2} e^{-t} dt$ $F'(x) = e^{-x^2}(2x) - e^{-2x} \cdot 2$ $F''(x) = 2e^{-x^2} - 4x^2 e^{-x^2} + 4e^{-2x}$ $\underline{F''(0) = 6}$. ☐

30) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n + n}{3^n} x^n$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n(1+\frac{n}{2^n})}{3^n}} = \underline{\frac{2}{3}}$ $\underline{r = \frac{3}{2}}$. ☐

$$b1) i) \begin{cases} z - \bar{w} = 0 \\ |z|^2 + 2z - \operatorname{Im} \bar{w} = 5 + 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \bar{w} \Leftrightarrow \bar{z} = w \\ |z|^2 + 2z - \operatorname{Im} \bar{z} = 5 + 2i. \end{cases}$$

Per risolvere l'eq. $|z|^2 + 2z - \operatorname{Im} \bar{z} = 5 + 2i$ poniamo $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$ da determinare imponendo che risolva l'eq. data. Si ha

$$|z|^2 + 2z - \operatorname{Im} \bar{z} = 5 + 2i \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2(x + iy) - \operatorname{Im}(x - iy) = 5 + 2i$$

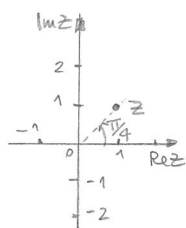
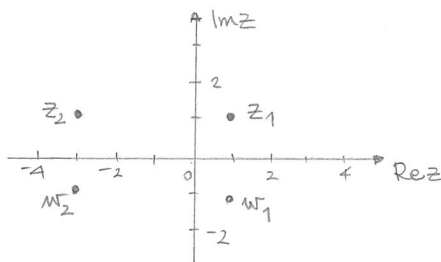
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x + 2y + y = 5 + 2i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + y = 5 \\ 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 + 2x + 1 = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(x-1) = 0 \\ y = 1. \end{cases}$$

Si ha che $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = -3 + i$ risolvono l'eq. $|z|^2 + 2z - \operatorname{Im} \bar{z} = 5 + 2i$.

Poichè $w_1 = \bar{z}_1 = 1 - i$ e $w_2 = \bar{z}_2 = -3 - i$, si ha che le coppie $(z_1, w_1) = (1 + i, 1 - i) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ e $(z_2, w_2) = (-3 + i, -3 - i) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ sono le soluzioni del sistema dato.



ii) $z = 1 + i$ con $w = 1 - i$ è soluzione del sistema in i) come verificato in i).

Abbiamo che $z = 1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$. Ne segue

$$\text{che } z^8 = (\sqrt{2})^8 \left(\cos \frac{2\pi}{1} + i \sin \frac{2\pi}{1} \right) = 16.$$

b2) Ricordiamo che $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$ per $t \rightarrow 0$, e quindi

$$e^{dx} = 1 + dx + \frac{d^2 x^2}{2} + \frac{d^3 x^3}{6} + o(x^3) \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Inoltre $\operatorname{tg} t = t + o(t)$ per $t \rightarrow 0$, e quindi $\operatorname{tg} x^2 = x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$.

Poichè $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$ e $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$

per $x \rightarrow 0$, possiamo scrivere

$$\frac{e^{dx} - 1 - \beta \sin x - 2x^2}{(\sqrt{1+x} - 1) \operatorname{tg} x^2} = \frac{1 + dx + \frac{d^2 x^2}{2} + \frac{d^3 x^3}{6} + o(x^3) - 1 - \beta x + \frac{\beta x^3}{6} + o(x^3) - 2x^2}{(1 + \frac{x}{2} + o(x) - 1)(x^2 + o(x^2))}$$

ossia

$$\frac{e^{\alpha x} - 1 - \beta \sin x - 2x^2}{(\sqrt{1+x} - 1) \operatorname{tg} x^2} = \frac{(\alpha - \beta)x + \left(\frac{\alpha^2}{2} - 2\right)x^2 + \left(\frac{\alpha^3}{6} + \frac{\beta}{6}\right)x^3 + o(x^3)}{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}$$

Abbiamo allora che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\alpha x} - 1 - \beta \sin x - 2x^2}{(\sqrt{1+x} - 1) \operatorname{tg} x^2} \text{ esiste finito} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ \frac{\alpha^2}{2} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha = \pm 2. \end{cases}$$

Per $\underline{\alpha = \beta = 2}$ il limite risulta $= \frac{\frac{8}{6} + \frac{\beta}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{8}{6} + \frac{2}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{10}{3}$, mentre

per $\underline{\alpha = \beta = -2}$ il limite risulta $= \underline{\underline{-\frac{10}{3}}}$. ▣

b3) i) $f(x) = \operatorname{arctg}(xe^x)$ • $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$;

• nessuna simmetria evidente;

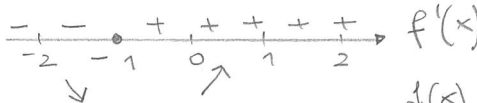
• segno  $f(x)$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{e^{-x}}\right) = \operatorname{arctg} 0 = 0$ $y=0$ asint. orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ $y=\frac{\pi}{2}$ asint. orizzontale per f , per $x \rightarrow +\infty$;

• continuità su tutto $\mathbb{R}$ perché prodotto e composizione di funz. continue su $\mathbb{R}$;

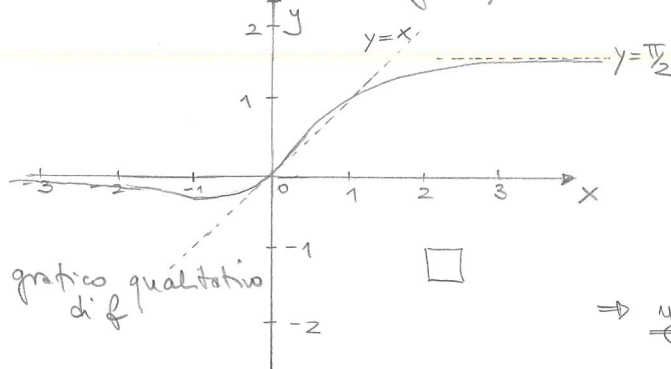
• $\operatorname{dom} f' = \mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{e^x + xe^x}{1 + (xe^x)^2} = \frac{e^x(1+x)}{1 + x^2e^{2x}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -1}}$ pt. critico per f

$x = -1$ pt. di min. loc. (shetto) per f  $f'(x)$

$f(-1) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{e}\right)$

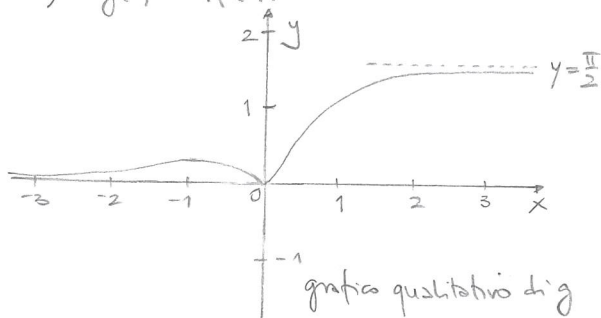
(nota: $\frac{1}{e} < 1$
 $\operatorname{arctg} \frac{1}{e} < \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$
 $-\operatorname{arctg} \frac{1}{e} > -1$)



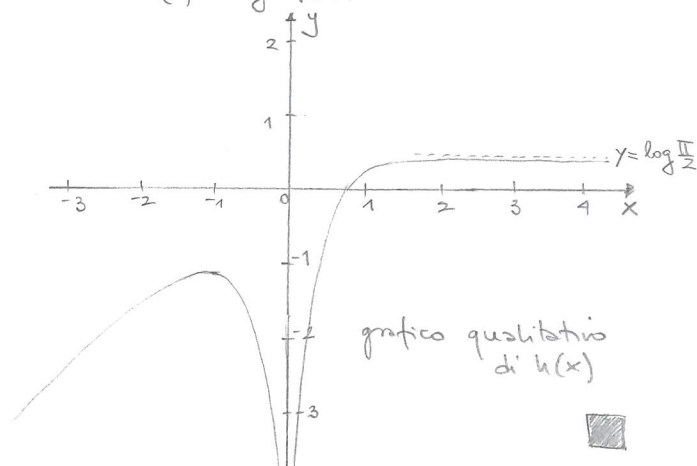
ii) $y = f(0) + f'(0)(x-0)$ eq. retta tg. al grafico di f in $x=0$

$\Rightarrow \underline{\underline{y = x}}$ eq. retta tg. al grafico di f in $(0,0)$. ▣

iii) $g(x) = |f(x)|$



$h(x) = \log |f(x)|$



b4) i) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(4x+1)} dx = \int \frac{1}{t(4t^2+1)} 2t dt =$

$\sqrt{x} = t$
 $x = t^2$
 $dx = 2t dt$

$= \int \frac{2}{(2t)^2 + 1} dt = \arctg(2t) + c = \underline{\underline{\arctg(2\sqrt{x}) + c}}$

$\text{celR} . \square$

ii) Sia $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(4x+1)}$ su $]0, +\infty[$. Osserviamo che f è continua, >0 .
 Inoltre,

per $x \rightarrow 0^+$ si ha $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$,

per $x \rightarrow +\infty$ si ha $f(x) \sim \frac{1}{4x\sqrt{x}} = \frac{1}{4x^{3/2}}$.

Poiché $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx < +\infty$ e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{4x^{3/2}} dx < +\infty$, per il criterio del

confronto asintotico possiamo asserire che $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ risulta convergente.

Usando la definizione si ha

$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 f(x) dx + \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M f(x) dx =$

$\stackrel{i)}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\arctg(2\sqrt{x}) \right]_{\varepsilon}^1 + \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[\arctg(2\sqrt{x}) \right]_1^M =$

$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\arctg 2 - \arctg(2\sqrt{\varepsilon})] + \lim_{M \rightarrow +\infty} [\arctg(2\sqrt{M}) - \arctg 2] = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$

$$b5) \quad y' + \frac{2x}{x^2+2} y = 8x \quad \Leftrightarrow \quad y' = \underbrace{\frac{-2x}{x^2+2}}_{a(x)} y + \underbrace{8x}_{b(x)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

è un'eq. diff. lineare del primo ordine. Possiamo applicare la formula risolutiva per trovare l'integrale generale dell'eq. diff.

Oss. che $A(x) = \int a(x) dx = \int \frac{-2x}{x^2+2} dx = -\log(x^2+2)$ è una primitiva di $a(x)$. Allora

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{A(x)} \left(c + \int b(x) e^{-A(x)} dx \right) \quad c \in \mathbb{R} \\ &= e^{-\log(x^2+2)} \left(c + \int 8x e^{\log(x^2+2)} dx \right) \\ &= \frac{1}{x^2+2} \left(c + \int 8x (x^2+2) dx \right) \\ &= \frac{1}{x^2+2} \left(c + \int (8x^3 + 16x) dx \right) = \\ &= \frac{1}{x^2+2} \left(c + \cancel{\frac{2}{3}} \cdot \cancel{\frac{3}{2}} x^4 + \cancel{\frac{8}{2}} x^2 \right) \\ y(x) &= \frac{1}{x^2+2} (c + 2x^4 + 8x^2) \quad c \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Notiamo che $2 = y(0) = \frac{c}{2}$, ossia $c = 4$. Quindi, in definitiva, la soluzione del problema di Cauchy dato è

$$y(x) = \frac{1}{x^2+2} (4 + 2x^4 + 8x^2) \quad x \in \mathbb{R}.$$

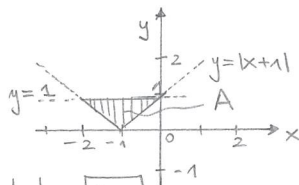
b6) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $x_0 \in \mathbb{R}$ è un pt. di minimo locale per f se esiste un intorno U di x_0 t.c. $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in U$, ossia se $\exists \delta > 0$ tale che $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. $\square$

ii) Enunciato e dim. del Teorema di Rolle:

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua su $[a, b]$, derivabile su $]a, b[$ e $f(a) = f(b)$. Allora esiste $c \in]a, b[$ tale che $f'(c) = 0$. $\square$

FILA(B) 21) $\log |2x| \leq 0 \Leftrightarrow 0 < |2x| \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \setminus \{0\} \Rightarrow A = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \setminus \{0\}$;

22) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x+1| \leq y \leq 1\}$



A non è un intervallo. $\square$

23) $z = i(2-i) \Rightarrow \underline{z = 1+2i}$

$|z| = \sqrt{1+4} = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$.

24) $A = \{x_n = \arcsin(-1 + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$

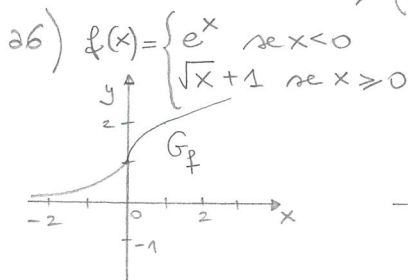
$\frac{1}{n} \downarrow 0 \quad -1 + \frac{1}{n} \downarrow -1$

Poiché $\arcsin x \uparrow \Rightarrow x_n \downarrow$; dunque

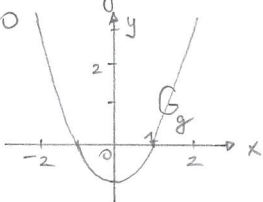
$\underline{\sup A = \max A = x_1 = \arcsin 0 = 0}$, $\inf A = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \arcsin(-1) = \underline{\underline{-\frac{\pi}{2}}}$. $\square$

25) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2-n} - \sqrt{n^2+3n}) = \underline{\underline{-2}}$. Infatti,

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2-n} - \sqrt{n^2+3n} &= (\sqrt{n^2-n} - \sqrt{n^2+3n}) \frac{(\sqrt{n^2-n} + \sqrt{n^2+3n})}{(\sqrt{n^2-n} + \sqrt{n^2+3n})} = \frac{n^2-n - (n^2+3n)}{n(\sqrt{1-\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{3}{n}})} \\ &= \frac{-4n}{n(\sqrt{1-\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{3}{n}})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -2. \end{aligned} \quad \square$$



$g(x) = x^2 - 1$.



$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= \begin{cases} e^{g(x)} & \text{se } g(x) < 0 \\ \sqrt{g(x)} + 1 & \text{se } g(x) \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} e^{x^2-1} & \text{se } -1 < x < 1 \\ \sqrt{x^2-1} + 1 & \text{se } x \leq -1 \text{ o } x \geq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad \square$$

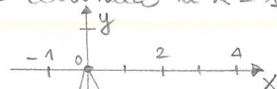
27) $f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{se } x \leq 1 \\ ax^2-b & \text{se } x > 1 \end{cases}$

f continua in $x=1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$

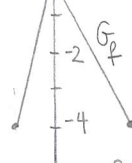
$\Leftrightarrow 2 = a-b$

f è derivabile in $x=1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) \Leftrightarrow -1 = 2a$
 coll. di L'Hôpital per a, b t.c. f è continua in $x=1$

$\Rightarrow \underline{a = -\frac{1}{2}} \quad \underline{b = -\frac{5}{2}}$.



28) $f(x) = x - 3|x| = \begin{cases} -2x & \text{se } x \geq 0 \\ 4x & \text{se } x < 0 \end{cases}$



$\min_{[1,2]} f = -4 \quad \max_{[1,2]} f = 0$.

29) $F(x) = \int_{x^2}^{3x} e^{-t} dt$

$F'(x) = e^{-3x} \cdot 3 - e^{-x^2} \cdot 2x$

$F''(x) = e^{-3x}(-9) - 2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2}$

$\underline{\underline{F''(0) = -11}}$ $\square$

30) $\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{3^n + n}{4^n}}_{a_n} x^n$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n(1 + \frac{n}{3^n})}{4^n}} = \frac{3}{4}$

$\underline{\underline{r = \frac{4}{3}}}$.



$$b1) i) \begin{cases} z - \bar{w} = 0 \\ |z|^2 + 3\bar{z} + \operatorname{Im} w = 6 + 3i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \bar{w} \Leftrightarrow \bar{z} = w \\ |z|^2 + 3\bar{z} + \operatorname{Im} \bar{z} = 6 + 3i. \end{cases}$$

Per risolvere l'eq. $|z|^2 + 3\bar{z} + \operatorname{Im} \bar{z} = 6 + 3i$ possiamo $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$ da determinare imponendo che risolva l'eq. data: Si ha

$$|z|^2 + 3\bar{z} + \operatorname{Im} \bar{z} = 6 + 3i \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 3(x - iy) + \operatorname{Im}(x - iy) = 6 + 3i$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 3x - 3yi - y = 6 + 3i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 3x - y = 6 \\ -3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 + 3x + 1 = 6 \\ y = -1 \end{cases}$$

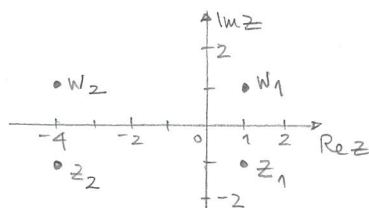
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 4 = 0 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)(x-1) = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

Si ha che $z_1 = 1 - i$ e $z_2 = -4 - i$ risolvono l'eq. $|z|^2 + 3\bar{z} + \operatorname{Im} \bar{z} = 6 + 3i$.

Poiché $w_1 = \bar{z}_1 = 1 + i$ e $w_2 = \bar{z}_2 = -4 + i$, si ha che le coppie

$(z_1, w_1) = (1 - i, 1 + i) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ e $(z_2, w_2) = (-4 - i, -4 + i) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ sono le

soluzioni del sistema dato.



ii) $z = 1 - i$ con $w = 1 + i$ è soluzione del sistema in i) come verificato

in i) Abbiamo che $z = 1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$.

Ne segue che $z^8 = (\sqrt{2})^8 \left(\cos\left(-\frac{8\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{8\pi}{4}\right) \right) = 16$.



b2) Ricordiamo che $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$ per $t \rightarrow 0$, e quindi

$$e^{dx} = 1 + dx + \frac{d^2 x^2}{2} + \frac{d^3 x^3}{6} + o(x^3) \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Inoltre $\arctg t = t + o(t)$ per $t \rightarrow 0$, e quindi $\arctg x^2 = x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$.

Poiché $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$ e $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$

per $x \rightarrow 0$, possiamo scrivere

$$\frac{e^{dx} - 1 + \beta \sin x - 2x^2}{(\sqrt{1+x} - 1) \arctg x^2} = \frac{1 + dx + \frac{d^2 x^2}{2} + \frac{d^3 x^3}{6} + o(x^3) - 1 + \beta x - \frac{\beta x^3}{6} + o(x^3) - 2x^2}{\left(1 + \frac{x}{2} + o(x) - 1\right) (x^2 + o(x^2))}$$

ossia

$$\frac{e^{\alpha x} - 1 + \beta \sin x - 2x^2}{(\sqrt{1+x} - 1) \operatorname{arctg} x^2} = \frac{(\alpha + \beta)x + \left(\frac{\alpha^2}{2} - 2\right)x^2 + \left(\frac{\alpha^3}{6} - \frac{\beta}{6}\right)x^3 + o(x^3)}{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}$$

Abbiamo allora che

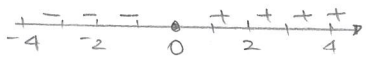
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\alpha x} - 1 + \beta \sin x - 2x^2}{(\sqrt{1+x} - 1) \operatorname{arctg} x^2} \text{ esiste finito} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \frac{\alpha^2}{2} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \alpha = \pm 2 \end{cases}$$

Per $\alpha = 2, \beta = -2$ il limite risulta $= \frac{\frac{2^3}{6} - \frac{\beta}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{8}{6} + \frac{2}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{10}{3}$, mentre per $\alpha = -2, \beta = 2$ il limite risulta $= -\frac{10}{3}$.

b3) i) $f(x) = \operatorname{arctg}(x e^{-x})$

• $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$;

• nessuna simmetria evidente;

• segno  $f(x)$

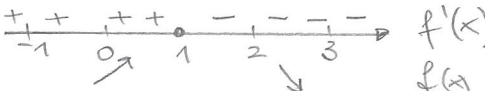
• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ $y = -\frac{\pi}{2}$ asint. orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{e^x}\right) = \operatorname{arctg} 0 = 0$ $y = 0$ asint. orizz. per f , per $x \rightarrow +\infty$.

• continuità su tutto $\mathbb{R}$ poiché prodotto e composizione di funzioni continue su $\mathbb{R}$;

• $\operatorname{dom} f' = \mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{e^{-x} - x e^{-x}}{1 + x^2 e^{-2x}} = \frac{e^{-x}(1-x)}{1 + x^2 e^{-2x}}$

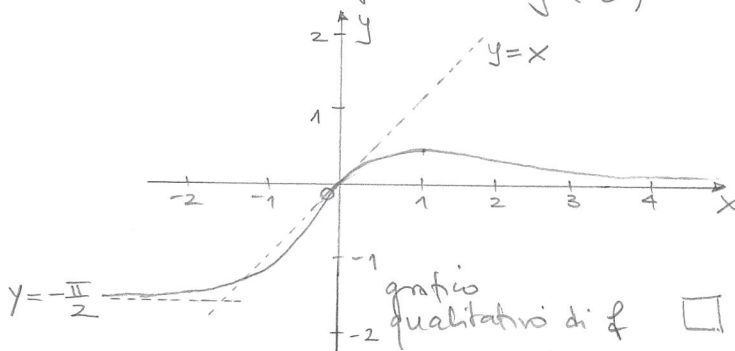
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ pt. critico per f

 $f'(x)$

$x = 1$ pt. di max. loc. (phetto) per f

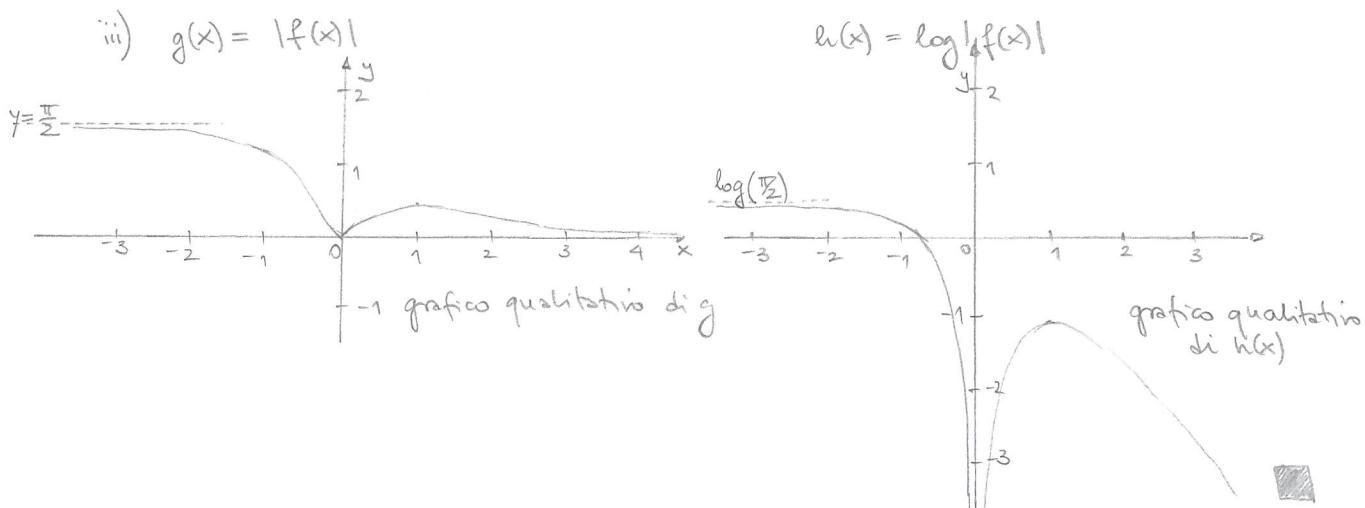
$f(1) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{e}\right) < 1$

$\left(\frac{1}{e} < 1, \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{e}\right) < \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} < 1\right)$



ii) $y = f(0) + f'(0)(x-0)$ eq. retta tg. al grafico di f in $x=0$

$y = x$ eq. retta tg. al grafico di f in $(0,0)$. $\square$



b) i) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(3x+1)} dx = \int \frac{1}{\cancel{t}(3t^2+1)} \cancel{2} dt =$

$\begin{matrix} \sqrt{x}=t \\ x=t^2 \\ dx=2t dt \end{matrix}$

$= \int \frac{2}{(3t)^2+1} dt = \frac{2}{3} \int \frac{3}{(3t)^2+1} dt$

$= \frac{2}{3} \arctan(3t) + c = \underline{\underline{\frac{2}{3} \arctan(3\sqrt{x}) + c}} \quad c \in \mathbb{R}.$

ii) Sia $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(3x+1)}$ su $]0, +\infty[$. Osserviamo che f è continua e > 0 .

Inoltre,

per $x \rightarrow 0^+$ si ha $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$,

per $x \rightarrow +\infty$ si ha $f(x) \sim \frac{1}{3x\sqrt{x}} = \frac{1}{3x^{3/2}}$.

Poiché $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx < +\infty$ e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{3x^{3/2}} dx < +\infty$, per il criterio del confronto asintotico possiamo assicurare che $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ risulta convergente.

Usando la definizione si ha

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} f(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 f(x) dx + \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M f(x) dx = \\
 &\stackrel{i)}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{2}{3} \arctan(3\sqrt{x}) \right]_{\varepsilon}^1 + \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{3} \arctan(3\sqrt{x}) \right]_1^M = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{2}{3} (\arctan 3 - \arctan(3\sqrt{\varepsilon})) \right] + \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{3} (\arctan(3\sqrt{M}) - \arctan 3) \right] \\
 &= \underline{\underline{\frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}}}.
 \end{aligned}$$

$$b5) \quad y' + \frac{2x}{x^2+4} y = 4x \quad \Leftrightarrow \quad y' = \underbrace{\frac{-2x}{x^2+4}}_{a(x)} y + \underbrace{4x}_{b(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue}}$$

è un'eq. diff. lineare del primo ordine. Possiamo applicare la formula riduttiva per trovare l'integrale generale dell'eq. differenziale.

Oss. che $A(x) = \int a(x) dx = \int \frac{-2x}{x^2+4} dx = -\log(x^2+4)$ è una primitiva di $a(x)$. Allora

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{A(x)} \left(c + \int b(x) e^{-A(x)} dx \right) \quad c \in \mathbb{R} \\ &= e^{-\log(x^2+4)} \left(c + \int 4x e^{\log(x^2+4)} dx \right) \\ &= \frac{1}{x^2+4} \left(c + \int 4x(x^2+4) dx \right) \\ &= \frac{1}{x^2+4} \left(c + \int (4x^3 + 16x) dx \right) = \\ &= \frac{1}{x^2+4} \left(c + \frac{4x^4}{4} + \frac{16x^2}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{y(x) = \frac{1}{x^2+4} (c + x^4 + 8x^2) \quad c \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.}}$$

Notiamo che $2 = y(0) = \frac{c}{4}$, ossia $c = 8$. Quindi, in definitiva, la soluzione del problema di Cauchy dato è

$$\underline{\underline{y(x) = \frac{1}{x^2+4} (8 + x^4 + 8x^2) \quad x \in \mathbb{R}.}}$$

b6) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ è un pt. di massimo locale per f se esiste un intorno U di x_0 t.c. $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in U$, ossia se $\exists \delta > 0$ tale che $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. □

ii) Enunciato e dim. del Teorema di Lagrange (o del valor medio):

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua su $[a, b]$, derivabile su $]a, b[$.

Allora $\exists c \in]a, b[$ tale che $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$. □