

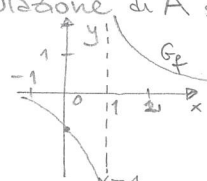
Università degli Studi di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
 CdL in Informatica - CdL in Ingegneria dell'Informazione e delle Comunicazioni
 CdL in Ingegneria dell'Informazione e Organizzazione d'Impresa
 ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1
 a.a. 2017-2018 - TRENTO, 11 giugno 2018

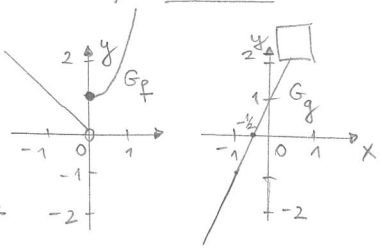
FILA (A)

21) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 5\} =]-5, 5[$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 1\} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$;
 $A \cap B =]-5, -1] \cup [1, 5[$. □

22) $z = \frac{3}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{6-3i}{4+1} = \frac{6}{5} - \frac{3}{5}i$. □

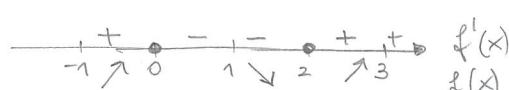
23) $A =]0, 2[\cup]2, 4]$; i pt. di accumulazione di A sono dati dall'insieme $[0, 4]$. □

24) $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-1}$  $f(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

25) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ $g(x) = 2x + 1$ 
 $(f \circ g)(x) = \begin{cases} -g(x) & \text{se } g(x) < 0 \\ g^2(x) + 1 & \text{se } g(x) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -(2x+1) & \text{se } x < -\frac{1}{2} \\ (2x+1)^2 + 1 & \text{se } x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$. □

26) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} \right) = 1 \cdot 2 = 2$. □

27) $f(x) = 2 \sin x + \log(1-x)$ $[\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3) \text{ per } t \rightarrow 0]$
 $= 2\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \text{ per } x \rightarrow 0$
 $= x - \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + o(x^3)$; quindi $P_3(x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}$. □

28) $f(x) = x^3 - 3x^2$; abbiamo f derivabile su $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$
 I pt. critici di f sono $x=0$, $x=2$ 
 Si ha che $x=0$ pt. di max. loc. (stretto), $x=2$ pt. di min. loc. (stretto) per f . □

29) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \cdot \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-\alpha}}$; serie risulta convergente $\Leftrightarrow 2-\alpha > 1$,
 $\Leftrightarrow \alpha < 1$. □

30) $y'(x) = 2y(x)$ $\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = 2 \Leftrightarrow \log|y(x)| = 2x + c$ $c \in \mathbb{R}$
 ($y \equiv 0$ è soluzione) $\Leftrightarrow |y(x)| = e^c e^{2x} \Leftrightarrow y(x) = \pm e^c e^{2x}$.

L'integrale generale di $y'(x) = 2y(x)$ è dunque $y(x) = k e^{2x}$ $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$. ■
 (con $k=0$ include anche la sol. $y \equiv 0$)

b1) i) f risulta continua in $x=0$ se $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$.

Quindi deve essere $b=3$. La funzione è chiaramente derivabile in ogni punto escluso al più il pt. di accordo $x=0$, con

$$f'(x) = \begin{cases} a & \text{se } x < 0 \\ -2e^{-x} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

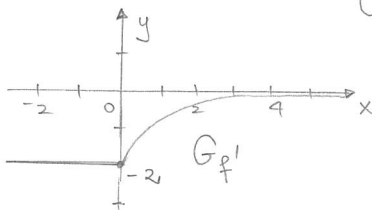
Per studiare la derivabilità in $x=0$, calcoliamo $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$. Per il collaudo di de l'Hôpital, se questo limite esiste ed è uguale a $l \in \mathbb{R}$, allora f è derivabile in $x=0$ e $f'(0)=l$. Essendo

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -2,$$

abbiamo che f è derivabile in $x=0$ se e solo se $a=-2$. In definitiva, f è continua e derivabile in $x=0$ se e solo se $a=-2$ e $b=3$. $\square$

ii) Abbiamo

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x \leq 0 \\ -2e^{-x} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$



$$\inf_{\mathbb{R}} f' = \underline{\underline{-2}}$$

$$\sup_{\mathbb{R}} f' = \underline{\underline{0}}.$$

b2) i) $f(x) = x^3 \log|x|$

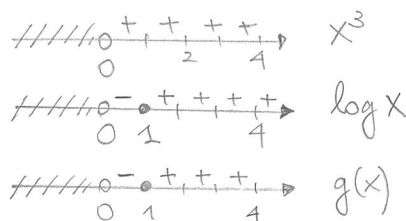
- $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ è simmetrico rispetto all'origine e $f(-x) = (-x)^3 \log|-x| = -x^3 \log|x| = -f(x) \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

quindi f è dispari. Basta studiare $f|_{]0, +\infty[}$ oppure $f|_{]-\infty, 0[}$.

• Studiamo $f|_{]0, +\infty[}(x)$, per $x \in]0, +\infty[$. Per comodità, poniamo

$$g(x) = f|_{]0, +\infty[}(x) \quad x > 0.$$

• segue



• $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$ (ripeto ora. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \log x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x^3}} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}} = 0$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

• continuità e derivabilità su tutto $]0, +\infty[$ poiché prodotto di funzioni continue su $]0, +\infty[$.

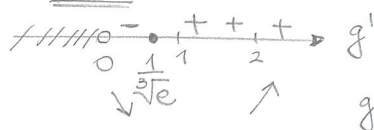
• dom $g' =]0, +\infty[$ $g'(x) = 3x^2 \log x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = x^2 [3 \log x + 1]$.

$$g'(x) = 0 \text{ su }]0, +\infty[\Leftrightarrow 3 \log x + 1 = 0 \Leftrightarrow \log x = -\frac{1}{3}$$

Note: $\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$, pt. critico per g .

$x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ è un pt. di min. loc. (sella) per g

$$g\left(\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right) = \frac{1}{e} \log \frac{1}{\sqrt[3]{e}} = -\frac{1}{3e}.$$



Possiamo ora tracciare un grafico qualitativo di g , e per simmetria rispetto all'origine, anche per f .

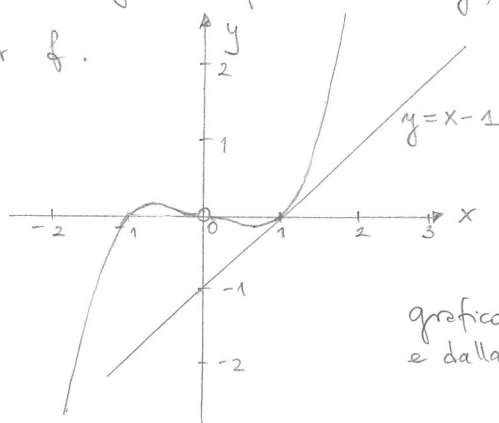


grafico qualitativo di f e dalla tg. in $(1,0)$.



ii) $y = f(1) + f'(1)(x-1)$ è l'eq. della retta tg al grafico di f in $x=1$.

Allora $y = x - 1$ poiché $f(1) = 0$ e $f'(1) = 1$.



b3) Ricordiamo che $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$ per $t \rightarrow 0$ e quindi

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6) \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Inoltre $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$, e quindi

$$\begin{aligned} (e^x - 1)^2 &= \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\ &= x^2 + \cancel{\frac{x^3}{2}} + \cancel{\frac{x^4}{3}} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) \text{ per } x \rightarrow 0 \\ &= x^2 + x^3 + \frac{7}{12}x^4 + o(x^4) \text{ per } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Infine $\arctg t = t + o(t)$ per $t \rightarrow 0$ e quindi $\arctg x^3 = x^3 + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$.

Possiamo allora scrivere

$$\frac{\sin x^2 - (e^x - 1)^2 + x^\alpha}{x \arctan x^3} = \frac{\cancel{x^2} - \frac{x^6}{6} + o(x^6) - \cancel{x^2} - x^3 - \frac{7}{12}x^4 + o(x^4) + x^\alpha}{x^4 + o(x^4)}$$

$$= \frac{-x^3 - \frac{7}{12}x^4 + x^\alpha}{x^4 + o(x^4)} \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Abbiamo allora che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x^2 - (e^x - 1)^2 + x^\alpha}{x \arctan x^3}$ esiste finito $\Leftrightarrow \alpha = 3$. $\square$

Inoltre, per $\alpha = 3$, il limite risulta uguale a $-\frac{7}{12}$. $\blacksquare$

b4) Poniamo $t = e^x - 1$; allora la serie data si scrive come la serie di

potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} t^n$. Sia $a_n = \frac{3^n}{n}$; allora $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{3^n} \rightarrow 3$.
 Allora il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} t^n$ è $r = \frac{1}{3}$. Possiamo allora
 osservare che $\forall t \in]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$ la serie di potenze è convergente. Inoltre:
 se $t = -\frac{1}{3}$, abbiamo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} \cdot \frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$. Poiché $b_n > 0$, $b_n \downarrow 0$,
 per il criterio di Leibniz, tale serie è convergente.
 Se $t = \frac{1}{3}$, abbiamo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} \cdot \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ che è la serie armonica, che
 sappiamo essere divergente.

Ricordando che $t = e^x - 1$, la serie di partenza è convergente $\forall x \in \mathbb{R}$
 tale che $-\frac{1}{3} \leq e^x - 1 < \frac{1}{3}$, ossia $\forall x \in \mathbb{R}$ t.c. $\frac{2}{3} \leq e^x < \frac{4}{3}$. Risulta che
 l'insieme di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} (e^x - 1)^n$ è $E = [\log \frac{2}{3}, \log \frac{4}{3}[$. $\blacksquare$

b5) i) $\int \sin \sqrt{x} dx = \int 2t \sin t dt \xrightarrow{\substack{\sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2t dt}} \int 2t \sin t dt \xrightarrow{\text{per parti}} 2 \left[-t \cos t + \int \cos t dt \right] =$

$$= 2 \left[-\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + \sin \sqrt{x} \right] + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Ne segue che $\int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} dx = 2 \left[-\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + \sin \sqrt{x} \right]_0^{\pi^2} = \underline{\underline{2\pi}}$. $\square$

ii) Sia $f(x) = \frac{\sin \sqrt{x} + x}{x^\alpha (1 + \sqrt{x^5})}$ su $]0, +\infty[$.

Osserviamo che f è continua e > 0 . Inoltre

per $x \rightarrow 0^+$ si ha $f(x) \sim \frac{\sqrt{x} + o(\sqrt{x}) + x}{x^\alpha} \sim \frac{\sqrt{x}}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha - 1/2}}$,

per $x \rightarrow +\infty$ si ha $f(x) \sim \frac{x}{x^\alpha \cdot x^{5/4}} = \frac{1}{x^{\alpha + 1/4}}$ (ricordate che $|\sin \sqrt{x}| \leq 1$)

Poiché $\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha - 1/2}} dx < +\infty \iff \alpha - \frac{1}{2} < 1$, e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha + 1/4}} dx < +\infty \iff \alpha + \frac{1}{4} > 1$,

per il criterio del confronto asintotico possiamo assicurare che $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ risulta convergente se e solo se $\underline{\underline{\frac{3}{4} < \alpha < \frac{3}{2}}}$. ■

b6)i) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ significa che: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che

$$|f(x) - 3| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - 1| < \delta;$$

oppure equiv. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che

$$3 - \varepsilon < f(x) < 3 + \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}, 1 - \delta < x < 1 + \delta, x \neq 1.$$

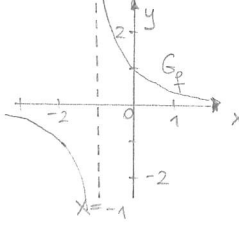
Si può anche scrivere: $\forall$ intorno U di 3 esiste un intorno V di 1 tale che $f(x) \in U$ per ogni $x \in V \setminus \{1\}$. □

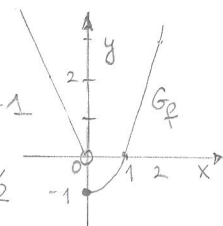
ii) Provate che la funzione composta di due funzioni crescenti è crescente. ■

FILA(B) a1) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 1\} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 3\} = [-3, 3]$;
 $A \cap B = [-3, -1[\cup]1, 3]$. □

a2) $z = \frac{2}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} = \frac{6+2i}{9+1} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$. □

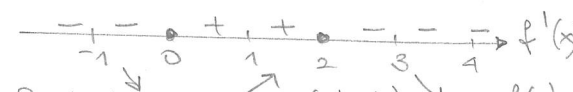
a3) $A = [0, 3[\cup]3, 5[$; i pt. di accumulazione di A sono dati dall'insieme $[0, 5]$. □

a4) $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$  $f(\mathbb{R} \setminus \{-1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. □

a5) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x < 0 \\ x^2 - 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ $g(x) = 2x - 1$  $(f \circ g)(x) = \begin{cases} -2g(x) & \text{se } g(x) < 0 \\ g^2(x) - 1 & \text{se } g(x) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -2(2x-1) & \text{se } x < \frac{1}{2} \\ (2x-1)^2 - 1 & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$. □

a6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{\sqrt{1+x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{\sqrt{1+x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} \cdot (\sqrt{1+x} + 1) = 1 \cdot 2 = 2$. □

a7) $f(x) = 2 \sin(x) + \log(1+x)$ $[\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3) \text{ per } t \rightarrow 0]$
 $= 2(-x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)) + (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3))$ per $x \rightarrow 0$
 $= -x - \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$; quindi $P_3(x) = -x - \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3$. □

a8) $f(x) = -x^3 + 3x^2$; abbiamo f derivabile su $\mathbb{R}$ e $f'(x) = -3x^2 + 6x = 3x(-x+2)$
 I pt. critici di f sono $x=0$, $x=2$ 
 Si ha che $x=0$ pt. di min. loc. (stretto), $x=2$ pt. di max. loc. (stretto) per f . □

a9) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{2\alpha} \cdot \frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4-2\alpha}}$; serie numerica convergente $\Leftrightarrow 4-2\alpha > 1$
 $\Leftrightarrow \alpha < \frac{3}{2}$. □

a10) $y'(x) = 3y(x)$ $\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = 3$ $\Leftrightarrow \log|y(x)| = 3x + c$ $c \in \mathbb{R}$
 ($y \equiv 0$ è soluzione) $\Leftrightarrow |y(x)| = e^c e^{3x} \Leftrightarrow y(x) = \pm e^c e^{3x}$. □

L'integrale generale di $y'(x) = 3y(x)$ risulta dunque $y(x) = k e^{3x}$ $x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}$.
 (così si include anche la sol. $y \equiv 0$) ■

b1) i) f risulta continua in $x=0$ se $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$.

Quindi deve essere $b=0$. La funzione è chiaramente derivabile in ogni punto escluso al più il pt. di ricordo $x=0$, con

$$f'(x) = \begin{cases} a^2 & \text{se } x < 0 \\ \frac{4}{x+1} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

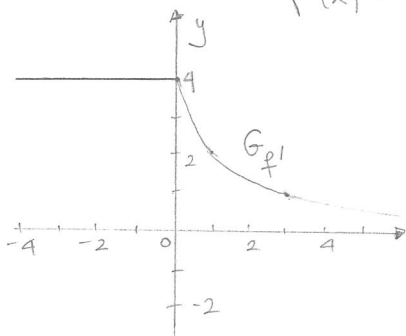
Per studiare la derivabilità in $x=0$, calcoliamo $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$. Per il corollario di de l'Hôpital, se questo limite esiste ed è uguale a $l \in \mathbb{R}$, allora f è derivabile in $x=0$ e $f'(0) = l$. Essendo

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = a^2, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 4,$$

abbiamo che f è derivabile in $x=0$ se e solo se $a^2 = 4$. In definitiva, f è continua e derivabile in $x=0$ se e solo se $a = \pm 2$ e $b = 0$. $\square$

ii) Abbiamo

$$f'(x) = \begin{cases} 4 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{4}{x+1} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

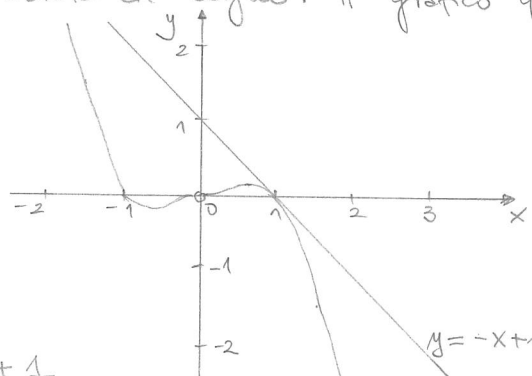


$$\inf_{\mathbb{R}} f' = \underline{\underline{0}}$$

$$\sup f' = \underline{\underline{4}}.$$

b2) i) $f(x) = -x^3 \log|x|$

Questa funzione è uguale alla funzione definita nell'es. b2) F1LA(A) solo cambiata di segno. Il grafico qualitativo risulta quindi essere



ii) $y = -x + 1$

eq. della retta tg. al grafico di f nel pt. $(1,0)$. $\square$

b3) Ricordiamo che $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$, e quindi

$$\begin{aligned}(e^x - 1)^2 &= \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\&= x^2 + \cancel{2 \cdot \frac{x^3}{2}} + \cancel{2 \cdot \frac{x^4}{6}} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) \text{ per } x \rightarrow 0 \\&= x^2 + x^3 + \frac{7}{12}x^4 + o(x^4) \text{ per } x \rightarrow 0;\end{aligned}$$

Inoltre da $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$ per $t \rightarrow 0$ si ottiene $\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$ per $x \rightarrow 0$. Infine $1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$.

Possiamo allora scrivere

$$\begin{aligned}\frac{(e^x - 1)^2 - \sin x^2 - x^d}{2x^2(1 - \cos x)} &= \frac{\cancel{x^2 + x^3} + \frac{7}{12}x^4 + o(x^4) - \cancel{x^2} + \frac{x^6}{6} + o(x^6) - x^d}{2x^2(\frac{x^2}{2} + o(x^2))} \\&= \frac{x^3 + \frac{7}{12}x^4 + o(x^4) - x^d}{x^4 + o(x^4)} \text{ per } x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Abbiamo allora che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)^2 - \sin x^2 - x^d}{2x^2(1 - \cos x)}$ esiste finito $\Leftrightarrow d = 3$. $\square$

Inoltre, per $d = 3$, il limite risulta uguale a $\frac{7}{12}$. $\blacksquare$

b4) Poniamo $t = 1 - e^x$; allora la serie data si scrive come la serie di potenze

Quindi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n} t^n$. Sia $a_n = \frac{4^n}{n}$; allora $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{4^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 4$. Allora il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n} t^n$ è $r = \frac{1}{4}$. Possiamo allora asserire che $\forall t \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ la serie di potenze è convergente. Inoltre: se $t = -\frac{1}{4}$, abbiamo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n} \cdot \frac{(-1)^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ che risulta convergente per il criterio di Leibniz. Se $t = \frac{1}{4}$, la serie di potenze si riduce alla serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, che sappiamo essere divergente.

Ricordando che $t = 1 - e^x$, la serie di potenze è convergente $\forall x \in \mathbb{R}$ tale che $-\frac{1}{4} \leq 1 - e^x < \frac{1}{4}$, ossia $\forall x \in \mathbb{R}$ t.c. $\frac{5}{4} \geq e^x > \frac{3}{4}$. Risulta che l'insieme di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n} (1 - e^x)^n$ è $E =]\log \frac{3}{4}, \log \frac{5}{4}]$. $\blacksquare$

b5) i) si prosegue come in Es. b5) FILA (A) e si ha

$$\int_0^{4\pi^2} \sin \sqrt{x} \, dx = 2 \left[-\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + \sin \sqrt{x} \right]_0^{4\pi^2} = \underline{\underline{-4\pi.}}$$

□

ii) sia $f(x) = \frac{\sin \sqrt{x} + x}{x^\alpha (1 + \sqrt{x^3})}$ su $]0, +\infty[$.

Osserviamo che f è continua e > 0 . Inoltre

per $x \rightarrow 0^+$ si ha $f(x) \sim \frac{\sqrt{x} + o(\sqrt{x}) + x}{x^\alpha} \sim \frac{x^{1/2}}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-1/2}}$,

per $x \rightarrow +\infty$ si ha $f(x) \sim \frac{x}{x^\alpha \cdot x^{3/2}} = \frac{1}{x^{\alpha+1/2}}$ (ricordare che $|\sin \sqrt{x}| \leq 1$)

Poiché $\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-1/2}} dx < +\infty \Leftrightarrow \alpha - \frac{1}{2} < 1$, e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1/2}} dx < +\infty \Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{2} > 1$,

per il criterio del confronto asintotico possiamo assicurare che $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ risulta convergente se e solo se $\underline{\underline{\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}}}$. ■

b6) i) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$ significa che: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che

$$|f(x) - 1| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - 3| < \delta;$$

oppure equiv. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che

$$1 - \varepsilon < f(x) < 1 + \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}, 3 - \delta < x < 3 + \delta, x \neq 3.$$

Si può anche scrivere: $\forall$ intorno U di 1 esiste un intorno V di 3 tale che $f(x) \in U$ per ogni $x \in V \setminus \{3\}$. □

ii) Provate che la funzione composta di due funzioni crescenti è crescente. ■